Tarea 1

1. Nociones de lógica y conjuntos

1. En un periódico aparece el siguiente párrafo: “El mexicano Juan René practica tiro con arco. Entrena arduamente en Jalisco. Está compitiendo en las Olimpiadas de Londres."Sean P, Q y R la primera, segunda y tercera oraciones de este párrafo respectivamente. Escriba en español las siguientes proposiciones (observe que la segunda y tercera oraciones no tienen sujeto, porque está implícito gracias a la primera oración):

(i) $P \wedge Q$,

(ii) $(\neg Q) \vee R$,

(iii) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.

2. Haga las tablas de verdad de las siguientes proposiciones:

(i) $((\neg P) \wedge Q) \Rightarrow R$,

(ii) $((\neg P) \wedge Q) \iff (P \vee (\neg Q))$,

(iii) $(\neg(P \vee Q)) \vee ((\neg P) \wedge Q)$.

3. Determine en cada caso si la información dada es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas, justificando sus respuestas:

(i) **(*)** $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$; sabiendo que R es verdadero (V)

(ii) $(P \vee Q) \iff ((\neg P) \wedge (\neg Q))$; sabiendo que Q es V

(iii) $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee R)$; sabiendo que P es V y R es falso (F)

(iv) $P \wedge (Q \Rightarrow R)$; sabiendo que $P \Rightarrow R$ es V

4. Diga si los siguientes pares de proposiciones son lógicamente equivalentes, justificando sus respuestas:

(i) $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$;

(ii) $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q \Rightarrow \neg P$;

(iii) $(P \vee R) \wedge (Q \vee \neg R)$ y $(R \wedge Q) \vee (\neg R \wedge P)$.

5. Escriba las siguientes proposiciones en lenguaje simbólico de tal manera que las letras representen proposiciones que ya no pueden descomponerse, después niegue las representaciones simbólicas de forma que cada símbolo de negación afecte a lo más a una letra, y retradúzcalas al español:

(i) Hay nubes, pero no llueve.

(ii) Voy al cine contigo si llevas tu auto, pero no van tu mamá ni tu hermano.

(iii) Si llueve, habrá agua.

6. **(*)** Niegue las siguientes fórmulas de manera que cada símbolo de negación afecte a lo más a un esquema proposicional:

(i) $\exists x(P(x) \vee \neg Q(x))$,

(ii) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$,

(iii) $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x)$,

(iv) $\forall x \exists y(x \cdot y = 0)$,

(v) $\exists x \forall y(x \leq y)$.

7. Diga de cuáles de los siguientes conjuntos es elemento el conjunto $\{\emptyset\}$ y en cuáles está contenido, justificando sus respuestas:

(i) $\emptyset$ (ii) $\{\emptyset\}$ (iii) $\{\{\emptyset\}\}$ (iv) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

8. Considere el conjunto universal $U = \mathbb{R}$ y los conjuntos $A = (-7, 2]$, $B = [-3, 5]$ y $C = [4, 10)$. Encuentre:

(i) $(A \cap B) \cup C$;

(ii) $(\mathbb{R} \setminus (A \cap B)) \cap C$.

9. Justifique lo siguiente proporcionando un contraejemplo adeuado en cada caso.

(i) No es cierto que $A \cup B \subseteq A$ para cualesquiera conjuntos A y B.

(ii) **(*)** Dados cualesquiera conjuntos A, B y C tales que $A \cup C \subseteq B \cup C$, no siempre es cierto que entonces $A \subseteq B$.

2. Inducción

10. Demuestre lo siguiente:

(i) El producto de 2 naturales consecutivos es par. *Obs.*- Por definición x es par sii existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k$ y x es impar sii existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k+1$, además puede dar por hecho que todo natural es par o es impar y que si un natural no es par entonces es impar y viceversa. Usando todo esto, no se necesita inducción para demostrarlo.

(ii) El producto de 3 naturales consecutivos es múltiplo de 6. *Sugerencia:* Hágalo por inducción y use el inciso anterior.

11. Demuestre que para toda $n \in \mathbb{N}$, $0^2 + 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

12. **(*)** Demuestre que para toda $n \in \mathbb{N}$, $0^3 + 1^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

13. Demuestre que para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

14. Demuestre que para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

15. **(*)** Demuestre que para toda $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 4$, entonces $2^n < n!$.

3. Números reales

Demuestre las siguientes afirmaciones

16. Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ se tiene que $a \cdot x = a$, entonces $x = 1$. Esto significa que el neutro multiplicativo es único.

17. **(*)** $\forall a \in \mathbb{R}(a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a)$.

18. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

19. Para todo número real distinto de cero, su inverso multiplicativo es único.

20. $\forall a, b \in \mathbb{R}\,(a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0))$. Más aún, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

21. **(*)** Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, si $a \neq 0$ entonces $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. (Aquí, estamos considerando que $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales, incluyendo al 0).

22. $\forall a, b \in \mathbb{R}\,(a < b \Leftrightarrow -b < -a)$. Concluye que, en particular, $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$.

23. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,(a < b \Rightarrow a + c < b + c)$.

24. **(*)** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,((a < b \wedge 0 < c) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c)$.

25. $\forall a \in \mathbb{R}\, a^2 \geq 0$ y $a^2 = 0$ si y sólo si $a = 0$.

26. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}(a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0)$.

27. **(*)** $\forall a, b \in \mathbb{R}\ ((a, b > 0 \wedge a < b) \Rightarrow b^{-1} < a^{-1})$.

28. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demestre que si $a < b$, entonces $ac > bc$ si y sólo si $c < 0$.

29. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a^2 + b^2 = 0$ si y sólo si $a = b = 0$.