Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2023-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 2

1. Demuestra lo siguiente:

(a) Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y todo $m \in \mathbb{N}^+$, $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$.

(b) Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y todo $m = -1, -2, -3, ...$, $a^{m+1} = a^m a$.

(c) Concluye que, para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$, $a^{m+n} = a^m a^n$. (*Utiliza la pregunta 12 de la Tarea 2*).

2. **(*)** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $|a| < c$ y $|b| < d$. Prueba que:

(i) $|a + b| < c + d$;

(ii) $|ab| < cd$.

3. Encuentra todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisface que

$$2 < |1 - x| < 3.$$

Prueba tu respuesta.

4. **(*)** Establece una definición para el máximo de dos números reales a y b, denotado como $\max(a, b)$. Explica cuáles son los axiomas de los números reales que justifican que tu definición está bien dada.

(a) Demuestra que $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.

(b) Define ahora al mínimo entre a y b, denotado como $\min(a, b)$ y establece una fórmula análoga a la del inciso anterior para el mínimo.

5. Haz un dibujo del conjunto de puntos (x, y) en $\mathbb{R}^2$ que hacen que se satisfaga cada una de las siguientes condiciones:

$$(a) \quad |x| + |y| = 1 \qquad\qquad (b) \quad \max(|x|, |y|) = 1$$

6. **(*)** Demuestra que el conjunto $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado superiormente. (No se vale usar propiedades de logaritmos).

7. Establece cuáles de los siguientes conjuntos tienen supremo, ínfimo, máximo o mínimo y determina, sin dar demostración, el valor de cada uno en su caso.

(a) $\mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}]$;

(b) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$;

(c) $\{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$;

(d) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

8. Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$.

(a) **(*)** Supongamos que S y T están acotados superiormente. Demuestra que $S \cup T$ está acotado superiormente y $\sup(S \cup T) = \max(\sup S, \sup T)$.

(b) Supongamos que S y T están acotados inferiormente. Definamos al conjunto

$$S + T := \{s + t : s \in S \text{ y } t \in T\}$$

Demuestra que $S + T$ está acotado inferiormente y que $\inf(S + T) = \inf S + \inf T$.

(c) Supongamos que S y T están acotados superiormente. Tomando al conjunto $S+T$ como en el inciso anterior, demuestra que $S + T$ está acotado superiormente y que $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.

9. Demuestra la propiedad de aproximación para el ínfimo, es decir, demuestra que, si $S \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $S \neq \emptyset$ y S es acotado inferiormente, entonces:

(a) $\forall \varepsilon > 0$ existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $\inf S \leq s_\varepsilon < \inf S + \varepsilon$.

(b) Recíprocamente, si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota inferior para S y β satisface que $\forall \varepsilon > 0$ existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $\beta \leq s_\varepsilon < \beta + \varepsilon$, entonces $\beta = \inf S$.

10. Demuestra que si x y y son números reales tales que $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$. A esta propiedad se le conoce como la **densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.**
Sugerencia: Supón primero que $0 < x$ (el caso $x \leq 0$ se sigue más fácilmente teniendo este caso). Utiliza la propiedad Arquimedeana para encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $ny - nx > 1$. Observa que, como $nx > 0$, entonces existe un número natural $m \geq 1$, tal que $m - 1 \leq nx < m$.

11. **(*)** Demuestra que los números irracionales son densos en $\mathbb{R}$, es decir, demuestra que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, si $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$. *Sugerencia:* Utiliza el hecho de que $\sqrt{2}$ es un número irracional y utiliza también la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

12. Demuestra que existe un único número real $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^3 = 2$. *Sugerencia:* Adapta y cambia adecuadamente la prueba del hecho de que existe un único número real positivo tal que $a^2 = 2$.

13. ¿Por qué es cierto que cada número irracional es el supremo de un conjunto de números racionales? Reflexiona sobre esto y escribe una prueba para este enunciado.

14. **(*)** Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos de números reales y supongamos que $A \neq \emptyset$ y que B es acotado. Demuestra que

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

15. Determina para cuáles de los siguientes conjuntos existe el ínfimo y/o el supremo y, en caso de que existan, encuéntralos. Establece también cuáles de estos conjuntos tienen elemento máximo o elemento mínimo (es decir, determina cuándo el supremo y el ínfimo pertenecen al conjunto). Demuestra todas tus respuestas.

(a) **(*)** $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$;

(b) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$;

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$;

(d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$;

(e) **(*)** $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 \geq 0\}$;

(f) **(*)** $\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$.

16. Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto tal que $A \neq \emptyset$ y que A está acotado inferiormente. Sea B el conjunto de todas las cotas inferiores de A. Demuestra que $B \neq \emptyset$, que B está acotado superiormente y que $\sup B = \text{ínf } A$.

17. Supongamos que A y B son dos conjuntos no vacíos de números reales tales que, para cualesquiera $x \in A$ y $y \in B$, se cumple que $x \leq y$.

(a) Demuestra que $\sup A \leq y$ para todo $y \in B$.

(b) Demuestra que $\sup A \leq \text{ínf } B$.

18. (a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un número real fijo y sea $A := \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$. Demuestra las siguientes afirmaciones (todas son sencillas):

(i) Si $x \in A$ y sabemos que $y < x$, entonces $y \in A$;

(ii) $A \neq \emptyset$;

(iii) $A \neq \mathbb{R}$;

(iv) Si $x \in A$, entonces existe algún $x' \in A$ tal que $x < x'$. *Sugerencia: Recuerda los axiomas del orden.*

(b) Supongamos ahora que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto que satisface las condiciones (i)-(iv) del inciso anterior. Demuestra que $A = \{x \in \mathbb{R} : x < \sup A\}$.

19. Escribe, utilizando lenguaje matemático formal, la definición de que una sucesión (a_n) sea convergente. Escribe también la negación de este enunciado, es decir, escribe en lenguaje matemático la definición de que una sucesión (a_n) no sea convergente.

20. Para cada una de las siguientes sucesiones (a_n), y para una $\varepsilon > 0$ arbitraria, encuentra una $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. (No es necesario que la N que encuentras sea óptima. Sólo queremos encontrar alguna N que funcione.)

$$\text{(i)} \quad a_n = \frac{1}{n^2+3}; \quad \text{(ii)} \quad a_n = \frac{1}{n(n-\pi)}; \quad \text{(iii)} \quad \frac{1}{\sqrt{5n-1}}.$$

21. Utiliza el Lema del Sándwich para probar que cada una de las siguientes sucesiones converge a 0.

$$\text{(i)} \quad \frac{n+1}{n^2+n+1}; \quad \text{(ii)} \quad \frac{\cos(n^2)}{2^n}; \quad \text{(iii)(*)} \quad \begin{cases} 1/2^n & \text{si } n \text{ es primo} \\ -1/3^n & \text{si } n \text{ no es primo.} \end{cases}$$

22. **(*)**

(a) Demuestra que $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \longrightarrow 0$. *Sugerencia:* Demuestra y utiliza el hecho de que $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

(b) Demuestra que $n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$.

(c) Definamos ahora a la sucesión $a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. Demuestra, utilizando el teorema del binomio para $(1 + a_n)^n$, que

$$a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

para toda $n > 1$.

(d) Utiliza los incisos anteriores para demostrar que $n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$.

23. **Utiliza la definición de límite** para demostrar lo siguiente:

(i) **(*)** $\lim \frac{2n}{n+1} = 2$;

(ii) $\lim \frac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0$;

(iii) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+7}} = 0$;

(iv) $\lim \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}$;

24. Demuestra que $\lim \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 0$.

25. Escribe, utilizando lenguaje matemático formal, la definición de que una sucesión (a_n) es acotada y la definición de que (a_n) tiende a ∞.

Escribe también la negación de las definiciones anteriores.

26. Para cada una de las siguientes sucesiones (a_n), determina si $a_n \to \infty$. Justifica brevemente tus respuestas.

$$\text{(i)} \quad a_n = \frac{n^2+n+1}{n+1}; \quad \text{(ii)} \quad a_n = \frac{n^{3/4}}{\sqrt{5n-1}}; \quad \text{(iii)} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

27. **(*)** Supongamos que (a_n) es una sucesión tal que $a_n \to 0$. Sea (b_n) una sucesión acotada. Demuestra que $a_n b_n \to 0$.

Ahora, proporciona ejemplos de sucesiones (a_n) y (c_n) de tal forma que $a_n \to 0$ y demostrando que cada una de las siguientes situaciones puede ocurrir:

(i) **(*)** $a_n c_n \to 0$ y (c_n) es acotada;

(ii) $a_n c_n \to \infty$;

(iii) $a_n c_n \to L$ para algún $L \neq 0$;

(iv) $(a_n c_n)$ es acotada y divergente;

(v) $a_n c_n \to -\infty$

(Las sucesiones pueden variar entre cada inciso).