Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2023-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 3

1. **(*)** Supongamos que (a_n) es una sucesión tal que $a_n \to 0$. Sea (b_n) una sucesión acotada. Demuestra que $a_n b_n \to 0$.

Ahora, proporciona ejemplos de sucesiones (a_n) y (c_n) de tal forma que $a_n \to 0$ y demostrando que cada una de las siguientes situaciones puede ocurrir:

(i) **(*)** $a_n c_n \to 0$ y (c_n) es acotada;

(ii) $a_n c_n \to \infty$;

(iii) $a_n c_n \to L$ para algún $L \neq 0$;

(iv) $(a_n c_n)$ es acotada y divergente;

(v) $a_n c_n \to -\infty$

(Las sucesiones pueden variar entre cada inciso).

2. Para cada una de las siguientes sucesiones (a_n), determina si (a_n) es convergente. Justifica tus respuestas y encuentra el límite cuando éste exista. (Puedes utilizar todos los teoremas de álgebra de límites, desigualdades y teoremas del sándwich).

$$\text{(i)}\textbf{(*)} \quad a_n = \frac{n^2}{n!}; \quad \text{(ii)}\textbf{(*)} \quad a_n = \frac{2^n n^2 + 3^n}{3^n(n+1) + n^7}; \quad \text{(iii)} \quad \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

3. (a) Considera la sucesión (a_n) definida como

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\cos(2\pi n/3).$$

Encuentra subsucesiones adecuadas para demostrar que (a_n) es divergente.

(b) Considera la sucesión $(\cos(n))$. Muestra que, para alguna constante $K > 0$, existen subsucesiones (b_r) y (c_s) de $(\cos(n))$ tales que $b_r > K$ para todo $r \in \mathbb{N}$ y $c_s < -K$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Deduce que $(\cos(n))$ es divergente.

4. (a) Sea (a_n) una sucesión tal que las subsucesiones (a_{2n}) y (a_{2n+1}) convergen a un número real L. Demuestra que $a_n \to L$.

(b) Sea (b_n) una sucesión tal que (b_{2n}), (b_{2n+1}) y (b_{3n}) son convergentes. ¿Es posible deducir que (b_n) converge? Proporciona una prueba o contraejemplo para justificar tu respuesta.

5. Sea (x_n) una sucesión acotada y para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

$$s_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$$

y

$$t_n := \text{ínf}\{x_k : k \geq n\}.$$

Demostrar que (s_n) y (t_n) son sucesiones convergentes. Así mismo, demostrar que si $\text{lím}\, s_n = \text{lím}\, t_n$, entonces (x_n) es convergente y

$$\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, s_n = \text{lím}\, t_n.$$

A $\text{lím}\, s_n$ se le llama el límite superior de (x_n) y a $\text{lím}\, t_n$ se le llama el límite inferior de (x_n).

6. Sea $x_n := \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Demuestra que (x_n) es creciente y está acotada y, en consecuencia, converge.
Sugerencia: Obsérvese que, si $k \geq 2$, entonces $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

7. Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. Demuestra que si $L \in \mathbb{R}$ es tal que $a_n \to L$, entonces $L \geq 0$ y $\sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$.

8. Sean (a_n), (b_n), (c_n) sucesiones de números reales y supongamos que $a_n \to L_1$, $b_n \to L_2$ y $c_n \to L_3$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $d_n := \text{máx}\{a_n, b_n, c_n\}$. Demuestra que $d_n \to \text{máx}\{L_1, L_2, L_3\}$.

9. Sea $r > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $a_n := \frac{r^n}{n!}$.

a) Considera los cocientes de la forma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y utilízalos para demostrar que, si $N \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande, entonces la cola de la sucesión $(a_n)_{n \geq N}$ es monótona decreciente. (Especifica el valor de N para el que esto ocurre).

b) Demuestra que (a_n) es convergente y encuentra el valor de su límite.

c) Sea (a_n) la sucesión de números reales definida para $n \geq 1$ como:

$$a_1 := a, \quad a_{n+1} := \frac{2}{a_n + 1}.$$

- Supongamos que $0 < a < 1$. Demuestra que las subsucesiones (a_{2n}) y (a_{2n+1}) son monótonas, con una creciente y la otra decreciente. Demuestra que cada una de estas subsucesiones converge y encuentra sus límites. Deduce que (a_n) converge.
- ¿Qué ocurre si $a > 1$?

d) Sea $x \in \mathbb{R}$ fija. Para cada $m, n \in \mathbb{N}^+$ definamos

$$a_{m,n} := \cos\left(\frac{m}{n}\pi x\right).$$

¿Qué puedes decir acerca del límite iterado

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right)?$$

Considera ahora el límite iterado

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right).$$

¿Existe siempre este límite? ¿Existe para algunos valores de $x \in \mathbb{R}$ pero no para otros? ¿O nunca existe este límite? ¿Qué conclusiones puedes obtener a partir de esto?

10. **(*)** Sean $x_1 > 1$ y $x_{n+1} := 2 - \frac{1}{x_n}$ para cada $n \geq 2$. Demuestra que (x_n) está acotada y que es monótona. Encuentra el límite de esta sucesión.

11. Sean $a > 0$ y $z_1 > 0$. Se define $z_{n+1} := (a + z_n)^{\frac{1}{2}}$ para $n \in \mathbb{N}^+$. Demuestra que (z_n) converge y encuentra su límite.

12. Este ejercicio era idéntico al ejercicio 6, así que queda cancelado.

13. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, definamos

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{y} \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

a) Demuestra que, para todo $n \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
Sugerencia: Demuestra que $a_n \leq a_{n+1}$ si y sólo si

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \frac{n}{n+1}.$$

Utiliza la desiguladad de Bernoulli en el lado izquierdo de esta desigualdad para demostrar que dicha desigualdad se satisface. Concluye entonces que (a_n) es monótona creciente.

b) Utiliza lo anterior y el problema 22 de la Tarea II para concluir que (a_n) es convergente.

14. **(*)** Supóngase que $x_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim(-1)^n x_n$ existe. Demostrar que (x_n) converge.

15. Demostrar que si (x_n) no está acotada, entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $\lim \frac{1}{x_{n_k}} = 0$.

16. Sea (x_n) una sucesión acotada y sea $s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que si $s \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe una subsucesión de (x_n) que converge a s.

17. **(*)** Demostrar directamente a partir de la definición que las siguientes son sucesiones de Cauchy:

$$\text{(a)} \left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad \text{(b)} \left(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

Sugerencia para (b): Recuerda que para toda $k \in \mathbb{N}^+$, si $k \geq 4$, entonces $2^k < k!$. Demuestra que, para toda $k \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}$.

18. Demostrar directamente a partir de la definición que las siguientes no son sucesiones de Cauchy.

$$\text{(a)}\ \ ((-1)^n) \qquad\qquad \text{(b)}\ \ \left(n + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

19. **(*)** Demostrar directamente que una sucesión creciente, monótona y acotada es una sucesión de Cauchy.