Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2023-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 4

1. Sean $A := B := \{x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq x \leq 1$ y considérese el subconjunto $C := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq A \times B$. ¿Es este conjunto una función? Justifica tu respuesta.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida de modo que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$. Sean $E := \{x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq x \leq 0\}$ y $F := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Demuestra que $E \cap F = \{0\}$ y que $f[E \cap F] = \{0\}$, mientras que $f[E] = f[F] = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$. Por tanto, $f[E \cap F] \subsetneq f[E] \cap f[F]$. ¿Qué ocurre si se omite al 0 de los conjuntos E y F?

3. Demuestra que si $f : A \to B$ es una función y si $E, F \subseteq A$, entonces $f[E \cup F] = f[E] \cup f[F]$.

4. Demuestra que si $f : A \to B$ es una función y si $G, H \subseteq B$, entonces:

a) **(*)** $f^{-1}[G \cup H] = f^{-1}[G] \cup f^{-1}[H]$ y

b) $f^{-1}[G \cap H] = f^{-1}[G] \cap f^{-1}[H]$.

Compara con los dos ejercicios anteriores.

5. Sea f una función que está definida como $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) ¿Cuál es el máximo subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que esta función está bien definida?

b) Calcula la imagen de f

c) ¿Es f una función biyectiva si restringimos el dominio al conjunto $(-1, 1)$? Si es el caso, calcula su función inversa y establece cuál es el dominio de la función inversa.

6. **(*)** Sea f una función que está definida como $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

a) ¿Cuál es el máximo subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que esta función está bien definida?

b) Calcula la imagen de f

c) ¿Es f una función biyectiva si restringimos el dominio al conjunto $(-1, 1)$? Si es el caso, calcula su función inversa y establece cuál es el dominio de la función inversa.

7. Determinar una condición sobre $|x - 1|$ que asegure que:

(i) $|x^2 - 1| < 1/2$;

(ii) $|x^2 - 1| < \frac{1}{10^3}$;

(iii) $|x^3 - 1| < \frac{1}{N}$ para una $N \in \mathbb{N}^+$ dada.

8. Sean $E \subseteq \mathbb{R}$, $c \in E'$ y $f : E \to \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to c} |f(x) - L| = 0$.

9. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si
$$\lim_{x\to 0} f(x+c) = L.$$

10. Sea $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x\to c} x^3 = c^3$.

11. Sea $c \geq 0$. Demostrar que $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

12. Determina cuáles de los siguientes límites existen en $\mathbb{R}$ y, en caso de que existan, encuentra su valor. Demuestra tus respuestas.

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{1-x}$;
(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{1+x}$;
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$;
(iv) (*) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$;
(v) $\lim_{x\to 0}(x + \operatorname{sgn}(x))$;
(vi) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x+1}$.

13. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Demostrar que existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y que, si $c \neq 0$, entonces no existe $\lim_{x\to c} f(x)$.

14. Demuestra que no existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.

15. Sean $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ y sea $p \in E'$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando prueba o contraejemplo en cada caso.

16. (i) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y existe $\lim_{x\to p}(f+g)(x)$, entonces existe $\lim_{x\to p} g(x)$.
(ii) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y existe $\lim_{x\to p}(fg)(x)$, entonces existe $\lim_{x\to p} g(x)$

17. Dar ejemplos de funciones f y g tales que f y g no tengan límite cuando $x \to p$ pero de tal forma que $f+g$ y fg sí tengan límite cuando $x \to p$.

18. Dar un ejemplo de una función que tiene un límite por la derecha pero no un límite por la izquierda en un punto.

19. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, sea $f\colon E \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de los conjuntos $E \cap (c, \infty)$ y $E \cap (-\infty, c)$. Demuestra que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$

20. Determina si los siguientes límites existen o no. En caso de que existan, determina cuál es su valor. Demuestra tus respuestas.

(i)(*)	$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$;	(v)	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$
(ii)	$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$;	(vi)	$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$
(iii)	$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$;	(vii)	$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$
(iv)	$\lim_{x\to \infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$;	(viii)(*)	$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$

21. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) **(*)** Sea f una función definida sobre un intervalo (a, ∞), con $\delta > 0$. Entonces, existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si y sólo si existe $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)$ y, en ese caso, ambos límites son iguales.

(b) Sean $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Supongamos que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y que $g(x) \to l$ cuando $x \to \infty$. Entonces, $g(f(x)) \to l$ cuando $x \to \infty$.

22. Sean $f, g \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones para las cuales existe el límite en $\mathbb{R}$ cuando $x \to \infty$ y tales que $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in (0, \infty)$. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} g(x)$.

23. Sea $f \colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to\infty} xf(x) = L$, donde $L \in \mathbb{R}$. Demuestra que entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

24. (i) Sean f y g funciones tales que $\lim_{x\to c} f(x) = L$, donde $L > 0$, y $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$. Demuestra que $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$.

(ii) Proporciona un ejemplo de funciones f y g tales que $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, pero $\lim_{x\to c} f(x)g(x) \neq \infty$.

25. Proporciona ejemplos de funciones f y g definidas en $(0, \infty)$ tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, pero de modo que $\lim_{x\to\infty}(f - g)(x) = 0$.

26. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que $(a, \infty) \subseteq E$ y sea $f \colon E \to \mathbb{R}$. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$;

(ii) para toda sucesión $(x_n) \subseteq E$ tal que $x_n \to \infty$, la sucesión $(f(x_n))$ converge a L.

27. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que $(a, \infty) \subseteq E$ y sea $f \colon E \to \mathbb{R}$. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;

(ii) para toda sucesión $(x_n) \subseteq E$ tal que $x_n \to \infty$, la sucesión $(f(x_n))$ tiende a ∞.