Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2023-1

Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 5

1. Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Determina el conjunto de puntos del dominio en el que es continua la función f.

2. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = |x|$ es continua en p para todo $p \in \mathbb{R}$.

3. Determina los puntos de continuidad de las siguientes funciones e indica los teoremas que se usan en cada caso.

(i) **(*)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) := \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$;

(ii) $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, con $g(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}}$;

(iii) **(*)** $h\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, con $h(x) := \frac{\sqrt{1+|\sin(x)|}}{x}$;

(iv) $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $k(x) := \cos(\sqrt{1+x^2})$.

4. Construye ejemplos de funciones f y g que sean discontinuas en un punto c de $\mathbb{R}$ tales que:

(a) $f + g$ sea continua en c;

(b) fg sea continua en c.

5. Dar un ejemplo de una función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que sea discontinua en todos los puntos de $[0,1]$ pero que $|f|$ sea continua en $[0,1]$.

6. Proporciona ejemplos de funciones con las siguientes propiedades:

(a) una función continua $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ que no sea acotada;

(b) una función continua $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ que no sea constante y que alcance tanto su valor máximo como su valor mínimo;

(c) una función continua $h\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ que sea acotada, que alcance su valor máximo en una cantidad infinita numerable de puntos y que alcance su valor mínimo en una cantidad infinita no numerable de puntos.
Sugerencia: Recuerda que cualquier intervalo no vacío de números reales es no numerable. Si en primera instancia no logras construir una función que satisfaga ambas condiciones simultáneamente, comienza por construir una que satisfaga la primer condición y otra que satisfaga la segunda condición. Después, "pégalas" adecuadamente.

7. Para cada una de las siguientes funciones, determina cuáles están acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado. Determina también cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo. *Nótese que f puede tener estas propiedades sin ser continua.*

a) $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2$.

b) $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^3$.

c) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

d) Dado $a\in\mathbb{R}$ fijo, con $a>0$, $f\colon(-a-1,a+1)\to\mathbb{R}$, $f(x):=\begin{cases} x^2 & \text{si } -a-1<x\le a \\ a+2 & \text{si } a<x<a+1. \end{cases}$
Será necesario considerar distintos valores para a.

e) Dado $a\in\mathbb{R}$ fijo, , con $a>0$, $f\colon[-a-1,a+1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\begin{cases} x^2 & \text{si } -a-1\le x< a \\ a+2 & \text{si } a\le x\le a+1. \end{cases}$

f) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q}, \text{con } \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$

g) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ -\frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q}, \text{con } \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$

8. **(*)** Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que para cada $x\in[a,b]$ existe un $y\in[a,b]$ tal que $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$. Demuestra que existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=0$.
Sugerencia: Construye una sucesión apropiada.

9. **(*)** Utiliza el *Teorema de las funciones continuas acotadas* visto en clase, para probar que si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua y si $f(x)\to\infty$ cuando $x\to\infty$ y también $f(x)\to\infty$ cuando $x\to-\infty$, entonces existe $x_0\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)\ge f(x_0)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

10. Demostrar que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

11. Demostrar que la ecuación $x=\cos(x)$ tiene una solución en el intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$.

12. Sea $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(0)=f(1)$. Demostrar que existe un punto $c\in[0,\frac{1}{2}]$ tal que $f(c)=f(c+\frac{1}{2})$.
Sugerencia: Considera $g(x):=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$.
Concluye que existen, en cualquier momento, puntos antípodas[1] en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.

13. **(*)** Sea $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$. Demuestra que $f(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$ ó $f(x)<0$ para todo $x\in(a,b)$.

14. Si f y g son funciones crecientes (o no decrecientes) en un intervalo $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, demuestra que $f+g$ es creciente (o no decreciente) en $[a,b]$.

15. Demuestra que tanto $f(x)=x$ como $g(x)=x-1$ son funciones crecientes en $[0,1]$, pero que su producto fg no es creciente en $[0,1]$.

16. Sean f y g dos funciones crecientes en el intervalo $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. Supongamos además que $f(x)\ge 0$ y $g(x)\ge 0$. Demuestra que fg es creciente en $[a,b]$.

[1] Dos puntos sobre una circunferencia son llamados *antípodas* si están en extremos opuestos de un diámetro.

17. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f(a) < f(b)$ y que f es inyectiva. Utiliza el Teorema del Valor Intermedio para probar que $f(a) < f(x) < f(b)$ para todo $x \in (a,b)$. Concluye que f es entonces creciente (en el sentido estricto).

18. Para cada uno de los siguientes polinomios f, encuentra un número entero $z \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$ para algún $x \in [z, z+1)$.

a) $f(x) = x^3 - x + 3$;

b) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$;

c) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

19. ¿Cuántas funciones continuas f existen que satisfacen que $f^2(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$?

20. Sea f una función polinómica cualquiera. Demuestra que existe algún $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $|f(x_0)| \leq |f(x)|$.

21. Supóngase que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Realiza un dibujo que represente esta situación y demuestra que existe algún $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f(x_0)$.

22. Sea $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$g(x) := \frac{x}{1-|x|}.$$

Demuestra que g es inyectiva, encuentra $g((-1,1))$ y calcula g^{-1}. ¿Son g y g^{-1} funciones continuas?

23. (a) ¿Cuáles de las siguientes funciones f, definidas en el intervalo $[-1,1]$ en (i) y (ii) tienen inversas $f^{-1}\colon [f(-1), f(1)] \to [-1,1]$? ¿Cuáles tienen inversa continua?. Justifica brevemente tus respuestas.

(i) $f(x) := (x+1)^2$;

(ii) $f(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1,0] \\ x+1 & \text{si } x \in (0,1] \end{cases}$

(b) Definimos a la función *tangente*, $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, como $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Dando por hecho que tan es creciente, continua, y que $\tan(x) \to \infty$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}$ y $\tan(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\frac{\pi}{2}$, **demuestra** cuidadosamente que *tan* tiene una función inversa que es continua en $\mathbb{R}$. Llamamos *arctan* a la inversa de la función tangente.

24. *a*) Sea $a \in (0,\infty)$ un número real positivo. Demuestra que la función $f(x) := \frac{1}{x}$ es uniformemente continua en el dominio $[a,\infty)$.

b) Sea $g(x) := x^2$. Demuestra que g no es uniformemente continua en el dominio $[0,\infty)$.

c) Demuestra que la función $h(x) := x^{1/3}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Es h una función Lipschitz continua?

25. Demuestra que si h es continua en $[0,\infty)$ y uniformemente continua en un intervalo de la forma $[a,\infty)$ para algún $a > 0$, entonces h es uniformemente continua en $[0,\infty)$.

26. *a*) Sea $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$. Demuestra que f es uniformemente continua.

b) Supongamos ahora que $g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

1) Demuestra que si (x_n) es una sucesión de Cauchy en $(a,b]$, entonces $(g(x_n))$ también es una sucesión de Cauchy.

2) Supongamos ahora que (x_n) y (y_n) son dos sucesiones en $(a,b]$ que convergen al número real a. Demuestra que si $(g(x_n))$ tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ y $(g(y_n))$ tiende a $m \in \mathbb{R}$, entonces $\ell = m$. Deduce que existe el límite $\lim_{x\to a} g(x)$.