Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral II 2023-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 1

1. (a) Partiendo directamente de la definición, demuestra que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ para $a \neq 0$.

(b) Demuestra que la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, 1/a)$ no corta a la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.

2. Demuestra que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

3. Utiliza la definición para encontrar la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, donde $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

4. Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestra que f es derivable en $x = 0$.

5. Sea $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en (a, b). Demuestra que si $g(x) = f(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $g'(x) = f'(x)$. Traza un dibujo explicativo.

6. Supongamos que f es derivable en x. Demostrar que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Sugerencia: Recuerda que un número no se altera cuando se le suma y resta la misma cantidad a la vez.

7. (a) Sea $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in (a, b)$ y supongamos que $g'(x_0) \neq 0$. Demuestra que $\frac{1}{g}$ es derivable en x_0 y que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(b) Sean $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $x_0 \in (a, b)$ y supongamos que $g'(x_0) \neq 0$. Demuestra que $\frac{f}{g}$ es derivable en x_0 y que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Puedes dar por hecho todas las propiedades de álgebra de límites.

8. (a) Demuestra que la función f definida como

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$. Encuentra su derivada.

(b) Calcula $f''(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Demuestra que $f''(0)$ no existe.

(c) Construye una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g'' exista y sea continua, pero tal que $g'''(0)$ no exista.

9. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que

(i) f es par si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) f es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestra que, si f es par, entonces $f'(x) = -f'(-x)$.

(b) Demuestra que, si f es impar, entonces $f'(x) = f'(-x)$.

10. Sea $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$ y consiera a la función

$$f(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Demuestra que existe $f^{(n-1)}$ y encuentra la fórmula correspondiente. Demuestra también que $f^{(n)}(0)$ no existe.

11. Para cada una de las siguientes funciones, determina cuál es su máximo dominio de definición. Encuentra los puntos críticos, determina cuáles de ellos son máximos o mínimos, y describe en qué conjuntos la función es creciente o decreciente.

(i) $f(x) := x^2 - 3x + 5$;

(ii) $g(x) := 3x^2 - 4x + 2$;

(iii) $h(x) := x^3 - 3x - 4$;

(iv) $k(x) := \frac{x+1}{x}$;

(v) $p(x) := \frac{x}{x^2+1}$;

(vi) $q(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$.

12. Considera las funciones definidas en $\mathbb{R}$ como:

$$f(x) = x^3 + 1 \qquad g(x) = 1 - (x-1)^2 \qquad h(x) = \arctan(x).$$

Proporciona fórmulas explícitas para las inversas de f y g. Esboza las gráficas de f, g y h y de sus inversas. Determina los puntos en los que las inversas son diferenciables.

13. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Utiliza el Teorema de Rolle para demostrar que la ecuación

$$0 = (x^2 - x)^2 p'''(x) + 6x(2x^2 - 3x + 1)p''(x) + 6(6x^2 - 6x + 1)p'(x) + 12(2x - 1)p(x)$$

tiene alguna solución en el intervalo $(0, 1)$.
Sugerencia: Si $q(x)$ y $p(x)$ son polinomios arbitrarios con coeficientes reales, calcula la tercer derivada del polinomio $q(x)p(x)$. ¿Cómo relacionar esto con la ecuación anterior?

14. Sean $a > b > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Demuestra que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a - b)^{\frac{1}{n}}$.
Sugerencia: Demuestra que la función $f(x) := x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente y evalúa en 1 y en a/b.

15. Muestra que la función dada por

$$f(x) := \begin{cases} 2x^4 + x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene un mínimo global en $x = 0$, pero que f' toma valores tanto positivos como negativos en cualquier intervalo de la forma $(-\delta, 0)$ y también en cualquier intervalo de la forma $(0, \delta)$, con $\delta > 0$.

16. Considera la función

$$g(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Muestra que $g'(0) = 1$, pero que g' toma valores tanto positivos como negativos en cualquier intervalo de la forma $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$. Esto significa que g no es monótona en ningún intervalo alrededor del 0.

17. Utiliza el Teorema del Valor Medio para demostrar que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

18. Utiliza el Teorema del Valor Medio para probar que $\frac{x-1}{x} < \log x < x-1$ para toda $x > 1$. (Puedes dar por hecho que $\frac{d}{dx} \log = \frac{1}{x}$).

19. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra el máximo y el mínimo en los intervalos indicados, hallando primero los puntos críticos y comparando con los valores que toma la función en los extremos del intervalo correspondiente o en las discontinuidades removibles, en su caso.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$;

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$;

(ii) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ en $[-1, \frac{1}{2}]$;

(iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 100 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

20. Esboza las gráficas de las funciones de la pregunta anterior.

21. Para cada una de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$, hallar todos los maximizantes y minimizantes locales.

(i) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

22. Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) en $\mathbb{R}^2$, definimos la distancia entre (x_0, y_0) y (x_1, y_1) como el número real

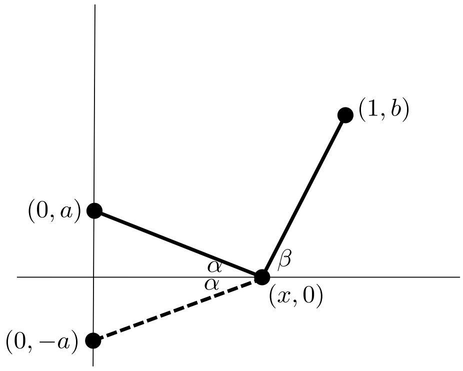
$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) := \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto del plano y sea L el conjunto de puntos (x, y) sobre la recta dada por $y = f(x) = mx + b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$ son constantes. Hallar el punto $(x_1, y_1) \in L$

tal que la distancia de (x_0, y_0) a (x_1, y_1) sea mínima.
Sugerencia: Observa que minimizar la distancia entre dos puntos es lo mismo que minimizar su cuadrado. Observa también que el problema puede reducirse a encontrar x_1, pues eso determina por completo quién es (x_1, y_1).

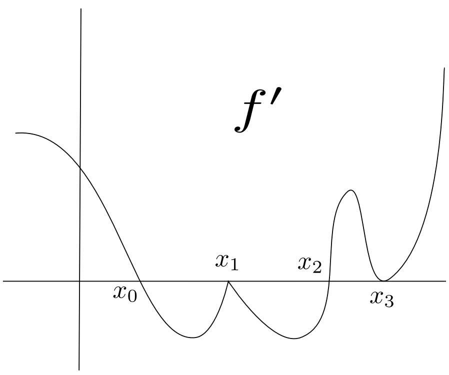
23. Demuestra que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

24. Se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal y desde ahí otra a $(1, b)$, como en la siguiente figura. Demuestra que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales. *Sugerencia:* Deberá entrar en juego una función. Expresar la longitud en función de x, donde $(x, 0)$ es el punto del eje horizontal.



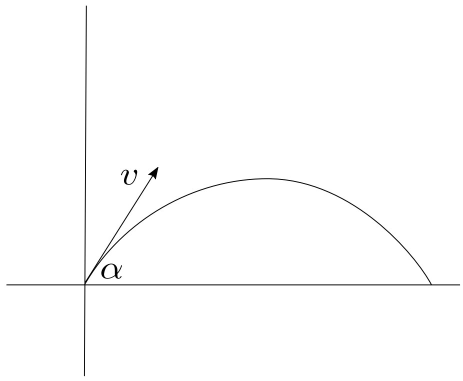
25. Sea $x > 0$ un número real. Demuestra que la suma de x y su recíproco es por lo menos 2.

26. La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de una función f. Encuentra todos los maximizantes y minimizantes locales de f.



27. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad v y según un ángulo α, de modo que su componente vertical de velocidad es $v\sin(\alpha)$ y la componente horizontal es $v\cos(\alpha)$. Su distancia $s(t)$ sobre el nivel del suelo obedece a la ley $s(t) = -4{,}9t^2 + (v\sin(\alpha))t$, mientras que su velocidad horizontal se mantiene como la constante $v\cos(\alpha)$.

(a) Demuestra que la trayectoria de la bala es una parábola. *Indicación:* Hallar la posición para cada tiempo t y demostrar que estos puntos están sobre una parábola.



(b) Halla el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.

28. (a) Proporciona un ejemplo de una función f para la cual existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ pero no existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$. *Sugerencia:* Construye una función tal que su derivada oscile entre valores "grandes" cuando $x \to \infty$ pero que la función misma no tenga este comportamiento.

(b) Demuestra que si existen los límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
Sugerencia: Utiliza algún teorema importantísimo de la teoría de derivación.

29. Calcula los siguientes límites sin utilizar la regla de L'Hôpital. Puedes usar cualquier otra propiedad algebraica de los límites y cualquier derivada que necesites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{x^3}$.
Sugerencia: $\operatorname{sen}^4(x) = \operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}(x)$

30. Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan(x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{(e^x-1)^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\operatorname{sen}(x)}$

31. Prueba la regla de L'Hôpital para $x \to \infty$: Sean $f, g\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$ son derivables y tales que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Si $g'(x) \neq 0$ sobre (a,∞) y si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Sugerencia: Utiliza la siguiente propiedad de límites de funciones: Si f es una función definida sobre un intervalo (a,∞), con $\delta > 0$, entonces existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si y sólo si existe $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)$ y, en ese caso, ambos límites son iguales.

32. Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}.$$

33. Sea (a,b) un intervalo abierto y sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in (a,b)$. Utiliza la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2}.$$

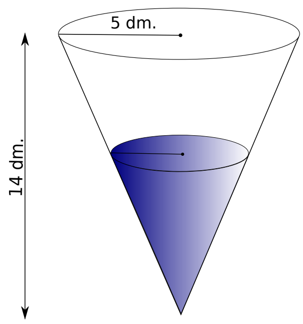
34. Encuentra la ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 9$ en el punto $(2, \sqrt{5})$.

35. *Este ejercicio pasará a la sigiuente tarea.*

36. Un tanque cónico de agua gotea el líquido a una razón constante de $2\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{hr}$. El radio de la tapa circular del cono es de 5 dm. y la altura del tanque es de 14 dm.

(a) ¿A qué razón está cambiando la profundidad del agua en el tanque cuando la profundidad del agua es de 6 dm.?

(b) ¿A qué razón está cambiando el radio de la superficie de agua en el tanque cuando la profundidad de la misma es de 6 dm.?



37. Una lámpara se encuentra sobre un poste de 4 m. de largo y una persona de 1,58 m. de altura se aleja del poste a una razón de 60 cm/s.

(a) ¿A qué razón se aleja del poste la punta de la sombra de la persona cuando la persona se encuentra a 6 m. del poste?

(b) A qué velocidad se aleja de la persona la punta de la sombra de la persona cuando la persona se encuentra a 6 m. del poste?