Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral II 2023-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 2

1. Encuentra y' en cada uno de los siguientes casos.

(i) $x^3y^5 + 3x = 8y^3 + 1$.

(ii) $x^2\tan(y) + y^{10}\sec(x) = 2x$.

(iii) $e^{2x+3y} = x^2 - \log(y^3)$.

2. Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable en $[0,2]$ y calcular su integral.

3. Demostrar que si $g(x) = 0$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $g(x) = 1$ para $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces $\int_0^1 g(x) = \frac{1}{2}$.

4. Sea $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demostrar que $\underline{\int}_0^1 h(x)\,dx = 0$ y $\overline{\int}_0^1 h(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Concluir que entonces h no es integrable en $[0,1]$.

5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que $f(x) = 0$ en el conjunto $[a,b]$ salvo por un conjunto finito $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Demostrar que f es integrable y que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

6. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y supongamos que para cualquier $c \in (a,b)$, la restricción de f al conjunto $[c,b]$ es integrable. Demostrar que f es integrable en $[a,b]$ y que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a} \int_c^b f(x)\,dx$.

7. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y tal que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$. Demostrar que $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

8. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demostrar que si $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda $x \in [a,b]$.

9. Sean f_1, f_2 dos funciones acotadas definidas en un intervalo $[a,b]$. Demostrar que $\underline{\int}_a^b f_1(x)\,dx + \underline{\int}_a^b f_2(x)\,dx \leq \underline{\int}_a^b (f_1 + f_2)(x)\,dx$.
Sugerencia: Demuestra primero que

$$\inf\{f_1(x) : x \in X\} + \inf\{f_2(x) : x \in X\} \leq \inf\{f_1(x) + f_2(x) : x \in X\}.$$

10. Demostrar que la función $f(x) = \cos(\frac{\pi}{x})$ para $0 < x \leq 1$, y tal que $f(0) = 0$, es integrable en $[0, 1]$.

11. Demostrar que si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y tiene un número finito de discontinuidades, entonces f es integrable en $[a, b]$.
Sugerencia: Utiliza el ejercicio **6.**

12. Dar un ejemplo de una función integrable $h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ con $h(x) > 0$ para toda x, pero tal que $1/h$ no sea integrable en $[0, 1]$.

13. Demostrar que si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $1/f$ es integrable en $[a, b]$.

14. Sea $f\colon [-10, 100] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $\int_{12}^{-10} f(x)\,dx = 6$, $\int_{100}^{-10} f(x)\,dx = -2$ y $\int_{100}^{-5} f(x)\,dx = 4$. Determina el valor de $\int_{-5}^{12} f(x)\,dx$.

15. Sea $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet definida como

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestra que f no es integrable.

16. Dar un ejemplo de una función $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ que no sea integrable en $[0, 1]$ pero tal que $|f|$ sea integrable en $[0, 1]$.
Sugerencia: Modifica la función del ejercicio anterior.

17. *a*) Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Utiliza la desigualdad

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

para demostrar que la función $|f|$ también es integrable en $[a, b]$.

b) Si f y g son dos funciones integrables en $[a, b]$, demuestra que la función

$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

es integrable en $[a, b]$.

c) En el contexto del inciso anterior, demuestra que si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

18. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea $k > 0$. Demuestra que, entonces, kf es una función integrable y que $\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$.

19. Demuestra que si $f\colon [a, b]$ es integrable en $[a, b]$ y si $0 \leq m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in [a, b]$, entonces

$$m \leq \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

20. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que

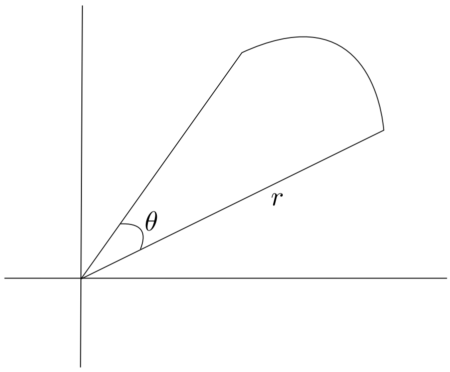
$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

21. Considera la función de Thomae, definida en el intervalo $[0,1]$ como

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$ y que $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

22. Consideramos la gráfica de una función en coordenadas polares. La siguiente figura muestra un sector circular con ángulo central θ. El área de este sector es $r^2 \frac{\theta}{2}$, cuando se mide θ en radianes.



Consideremos ahora la región A de la figura siguiente, donde la curva es la gráfica, en coordenadas polares de la función continua f. Demostrar que

$$\text{área } A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\, d\theta.$$