Cálculo Diferencial e Integral II 2023-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 2 bis

1. Determina los valores de las siguientes integrales. No se vale utilizar técnicas de integración; es posible obtener los valores de estas integrales con los resultados vistos en clase y utilizando fórmulas para obtener áreas de figuras geométricas conocidas.

a) $\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

b) $\int_{-1}^{1}(x^5+3)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

2. Determina cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre $[0,2]$ y calcula la integral cuando ésta exista.

a) $f(x) := \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

b) $f(x) := x + \lceil x \rceil$, donde $\lceil x \rceil$ es la función *techo*.

c) $f(x) := \begin{cases} x + \lceil x \rceil & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$

3. Dando por hecho que para cualesquiera $a < b$ se tiene que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ y que $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$, determina las áreas de las regiones limitadas por:

a) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$.

b) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$ y las rectas vericales que pasan por $(-1,0)$ y $(1,0)$.

c) Las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 2$.

d) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$ y el eje vertical.

e) La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal y la recta vertical que pasa por $(2,0)$. Nota que no es necesario saber integrar a la función $\sqrt{x}$.

4. Sean a y b números reales tales que $a < b$. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que la función $g(x) := f(x-c)$ es integrable en $[a+c, b+c]$ y que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

¿Qué significa esto geométricamente?
Sugerencia: Observa que si $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, entonces $\tilde{P} = \{x_0+c, x_1+c, ..., x_n+c\}$ es una partición de $[a+c, b+c]$ y viceversa.