Cálculo Diferencial e Integral II 2023-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 3

1. Si F_1 y F_2 son antiderivadas de una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, demostrar que $F_1 - F_2$ es una función constante.

2. Sea $G(x) := x^2 \sin(\frac{k}{x^2})$ para $0 < x \leq 1$, y $G(0) := 0$. Demostrar que la derivada $g(x) := G'(x)$ existe para toda $x \in [0,1]$, pero que g no está acotada y, en consecuencia, no es integrable. (Por tanto, g tiene una antiderivada en $[0,1]$, pero no es integrable en este intervalo.) Sin embargo, demostrar que existe $\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 g(x)\,dx$.

3. Sea $K(x) := x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ para $0 < x \leq 1$ y $K(0) := 0$. Demostrar que $k(x) := K'(x)$ es integrable en $[0,1]$ aún cuando es discontinua en $x = 0$. Calcular $\int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea $H\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$H(x) := \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Encuentra $H'(x)$ para $x \in [a,b]$.

5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y sea $v\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ derivable en $[c,d]$ tal que $v[c,d] \subseteq [a,b]$. Demuestra que si $G\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ está definida por

$$G(x) := \int_a^{v(x)} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

entonces $G'(x) = (f \circ v)(x)v'(x)$ para toda $x \in [c,d]$.

6. Encontrar F' para las siguientes funciones F definidas en el intervalo $[0,1]$.

(i) $F(x) := \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$;

(ii) $F(x) := \int_0^{x^2} (1-t^3)^{-1}\,\mathrm{d}t$;

(iii) $F(x) := \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;

(iv) $F(x) := \int_0^{\cos(x)} \cos(t)\,\mathrm{d}t$.

7. **Forma combinada del teorema fundamental del cálculo.** Sean F y f funciones reales y continuas en el intervalo $[a,b]$ y supongamos que $F(a) = 0$. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $F'(x) = f(x)$;

(ii) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para toda $x \in [a,b]$.

8. Supongamos que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y tal que, para toda $x \in [a,b]$,

$$\int_a^x f(y)\,dy = \int_x^a f(y)\,dy.$$

Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \in [a,b]$.

9. Sea $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ una función integrable, con $a > 0$. Demuestra lo siguiente:

(a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

10. Demostrar que

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t+1}\,dt > 0$$

para todo $x > 0$.

11. Calcula las siguientes integrales, justificando cada paso.

(i) $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;

(ii) $\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$;

(iii) $\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$;

(iv) $\int_1^2 \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,\mathrm{d}t$;

12. Hallar las áreas de las regiones limitadas por las siguientes curvas:

(i) la gráfica de $f(x) = x^2$ y la gráfica de $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$;

(ii) la gráfica de $f(x) = x^2$ y la gráfica de $g(x) = -x^2$, con $x \in [-1,1]$;

(iii) la gráfica de $f(x) = x^2$, la gráfica de $g(x) = x^2 - 2x + 4$, y el eje vertical;

(iv) las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 2$;

(v) la gráfica de $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, el eje horizontal, y la recta vertical que pasa por $(2,0)$.

13. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que:

a) Si f es integrable en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

b) Si f es integrable en $[ca,cb]$ si $c > 0$ (o en $[cb,ca]$ si $c < 0$, entonces

$$\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx = c\int_a^b f(cx)\,dx.$$

c) Si f es integrable en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

¿Cómo se interpreta esto geométricamente?

¿Es posible demostrar estos resultados con el teorema de cambio de variable que tenemos para la integral de Riemann? ¿Por qué?

14. Dando por hecho que el área del círculo unitario, descrito por la ecuación $x^2+y^2=1$, es igual a π, utilizar el ejercicio anterior para demostrar que el área de una elipse descrita por la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es $ab\pi$.

15. Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$ y sea $c\in(a,b)$. Considérese la función

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{con } x\in[a,b].$$

Proporcionar una demostración o un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) Si f es derivable en c, entonces F es derivable en c;

(b) Si f' es continua en c y existe en un intervalo que contiene a c, entonces F' es continua en c y existe en un intervalo que contiene a c.

16. Demostrar que los valores de las expresiones siguientes no dependen de x:

(i) $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$, donde x es cualquier real distinto de 0;

(ii) $\int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, donde x está en el intervalo $(0,\frac{\pi}{2})$. ¿Hay otros intervalos en los que esta expresión no dependa de x?

17. Hallar, sin hacer muchos cálculos, una función F tal que $F'''(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$.

18. Se dice que una función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es periódica con periodo a, si $f(x)=f(x+a)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(a) Si f es una función periódica con periodo a e integrable en $[0,a]$, demostrar que, para todo $b\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_b^{a+b} f(x)\,dx.$$

(b) Hallar una función f tal que f no sea periódica, pero que f' sí lo sea.
Sugerencia: Elegir una g periódica para la cual pueda asegurarse que $\int_0^x g$ no sea periódica.

(c) Supóngase que f' es periódica con periodo a y que es integrable en $[0,a]$. Demostrar que f es periódica si y sólo si $f(a)=f(0)$.

19. El objetivo de este ejercicio es practicar trucos algebraicos que aparecen frecuentemente en el cálculo de integrales. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^6}}{\sqrt{x}}\,dx$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$;

c) $\int \frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}\,dx$;

d) $\int \frac{a^x}{b^x}\,dx$, con $a,b>0$;

e) $\int \tan^2(x)\,dx$;

f) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

h) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)}$;

i) $\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}\,dx$;

j) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$.

20. El objetivo de este ejercicio es practicar el **método de sustitución** sin hacer demasiados cálculos. Evalúa las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$;

b) $\int xe^{-x^2}\,dx$;

c) $\int \frac{\log(x)}{x}\,dx$ (nota que en clase resolvimos esta integral por partes);

d) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$;

e) $\int e^{e^x}e^x\,dx$;

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;

g) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

h) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$;

i) $\int \log(\cos(x))\tan(x)\,dx$;

j) $\int \frac{\log(\log(x))}{x\log(x)}\,dx$;

21. El objetivo de este ejercicio es practicar la integración por partes. Evalúa las siguientes integrales:

a) $\int x^2e^x\,dx$;

b) $\int x^3e^{x^2}\,dx$;

c) $\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx$, con $a, b \in \mathbb{R}$;

d) $\int x^2\operatorname{sen}(x)\,dx$;

e) $\int (\log(x))^3\,dx$;

f) $\int \frac{\log(\log(x))}{x}\,dx$;

g) $\int \sec^3(x)\,dx$;

h) $\int \cos(\log(x))\,dx$;

i) $\int \sqrt{x}\log(x)\,dx$;

j) $\int x(\log(x))^2\,dx$.

22. Para resolver las siguientes integrales ten en mente sustituciones trigonométricas de la forma $x = \operatorname{sen}(x)$, $x = \cos(u)$, etc. Recuerda también que

$$\int \sec(x)\,dx = \log(\sec(x)+\tan(x)) + C$$

y que

$$\int \operatorname{cosec}(x)\,dx = -\log(\operatorname{cosec}(x)+\cot(x))+C.$$

Ten también a la mano la derivada de todas las funciones trigonométricas.

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

g) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$;

23. Más para el método de sustitución. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

b) $\int \frac{dx}{1+e^x}$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$;

f) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$;

g) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$ (utiliza dos sustituciones sucesivas.

h) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2}\,dx$.

24. Integración de funciones racionales. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$;

b) $\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$;

c) $\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx$;

d) $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$;

e) $\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx$;

f) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;

g) $\int \frac{2x}{(x^2+x+1)^2}\,dx$;

h) $\int \frac{3x}{(x^2+x+1)^3}\,dx$.

25. Una última lista para practicar integrales.
Considera utilizar manipulaciones algebraicas, sustituciones geométricas e integración por partes para calcular las siguientes integrales.

a) $\int \log(a^2 + x^2)\, dx$;

b) $\int \operatorname{sen}^3(x)\, dx$;

c) $\int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}\, dx$;

d) $\int \sec^3(x)\tan(x)\, dx$;

Considera utilizar el teorema de cambio de variable para las siguientes integrales.

e) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$;

f) $\int \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)}\, dx$;

g) $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x+1})$;

h) $\int \frac{\sqrt{x^3-2}}{x}$;

i) $\int \log(x + \sqrt{x})\, dx$.

26. Supongamos que f'' es una función continua en $[0, \pi]$ y que

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \operatorname{sen}(x)\, dx = 2.$$

Supongamos que $f(\pi) = 1$. Calcula $f(0)$.

27. Encuentra $\int \operatorname{arc\,sen}(x)\, dx$ utilizando el mismo truco que para log y para arctan.

28. Encuentra $\int \operatorname{sen}^4(x)\, dx$ de dos maneras diferentes: primero utilizando la fórmula de reducción y después utilizando la fórmula de $\operatorname{sen}^2(x)$.

29. Expresa $\int \log(\log(x))\, dx$ en términos de $\int \frac{1}{\log(x)}\, dx$. (Ninguna de las dos se puede expresar en términos de funciones elementales).

30. Expresa $\int x^2 e^{-x^2}\, dx$ en términos de $\int e^{-x^2}\, dx$. (Ninguna de las dos se puede expresar en términos de funciones elementales).

31. Para cada una de las integrales siguientes, establecer si es impropia y por qué. Así mismo, determinar si es convergente o divergente y, en caso de que sea **convergente**, determinar su valor:

(i) $\int_0^1 \log(x)\, dx$;

(ii) $\int_1^2 \frac{1}{x\log(x)}\, dx$;

(iii) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$;

(iv) $\int_0^1 x\log(x)\, dx$;

(v) $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$;

(vi) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx$;

(vii) $\int_2^\infty \frac{\log(x)}{x}\, dx$;

(vii) $\int_2^\infty \frac{1}{x\log^2(x)}\, dx$;

(viii) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

(ix) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$;

(x) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$;

(xi) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$;

32. Demuestra la siguiente versión de la integración por partes para integrales impropias: si $f, g, f', g' \colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en su dominio y tales que existe la integral impropia de a a ∞ de $f'g$ y de gf'', entonces

$$\int_a^{\infty} f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} f(x)g'(x)\,dx.$$

Nota: Dada una función $h \colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x)|_a^{\infty}$ se define como $h(x)|_a^{\infty} := \lim_{c\to\infty}(h(x)|_a^{c})$.

33. Un resorte tiene una longitud en estado natural de 20 cm. Se requiere una fuerza de 40 N para alargar (y mantener alargado) el resorte a una longitud de 30 cm. ¿Cuánto trabajo se realiza al alargar el resorte de una longitud de 35 cm. a una de 38 cm.?

Puedes utilizar la Ley de Hooke, que establece que la fuerza requerida para alargar un resorte a una distancia de x metros desde su longitud en estado natural está dada por

$$F(x) := kx,$$

donde $k > 0$ es llamada la *constante del resorte.*

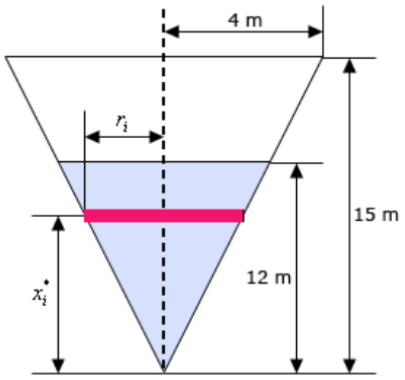
34. Se cuenta con un cable que pesa 1 kg/cm y que está amarrado a una cubeta llena de carbón con un peso de 400 kg. La cubeta se encuentra inicialmente al fondo de un pozo de 150 $m$de una mina. Contesta las siguientes preguntas:

a) Determina la cantidad de tarbajo requerida para levantar la cubeta al punto medio del pozo.

b) Determina la cantidad de trabajo requerida para levantar la cubeta del punto medio del pozo a la parte más superior de éste.

c) Determina la cantidad de trabajo requerida para levantar la cubeta del fondo del pozo a la parte más superior de éste.

35. Un tanque en la forma de un cono invertido tiene una altura de 15 metros y una base en forma de un círculo de radio 4 metros. El tanque está lleno con agua hasta una profundidad de 12 metros. Determina la cantidad de trabajo necesaria para bombear toda el agua hacia la parte superior del tanque. (Utiliza el valor de 1000 kg/m^3 para la densidad del agua).



36. Sea ϕ una función integrable no negativa y tal que $\phi(x) = 0$ para $|x| \geq 1$. Supongamos también que $\int_{-1}^{1} \phi = 1$. Para cada $h > 0$, definamos

$$\phi_h(x) := \frac{1}{h}\phi(x/h).$$

a) Demuestra que $\phi_h(x) = 0$ para $|x| \geq h$ y que $\int_{-h}^{h} \phi_h = 1$.

b) Sea f una función integrable en $[-1, 1]$ y continua en 0. Demuestra que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \phi_h f = \lim_{h\to 0^+} \int_{-h}^{h} \phi_h f = f(0).$$

Sugerencia: Demuestra primero la primera igualdad, usando las hipótesis sobre *phi*. Utiliza la definición de continudad en 0 para f.
Nota: Si f fuera continua en un intervalo alrededor del 0, la solución sería más sencilla pues podríamos utilizar el teorema de valor medio para integrales. Sin embargo, esta hipótesis no es necesaria, como se ve al resolver el ejercicio con la sugerencia anterior.

c) Demuestra que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2 + x^2}\, dx = \pi.$$

d) Sea $f[-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función integrable en su dominio y continua en 0. Demuestra que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)\, dx = \pi f(0).$$

Sugerencia: Cuando h es pequeño, $\frac{h}{h^2+x^2}$ será pequeño cuando x esté "lejos" del 0.