Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral II 2023-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 4

1. Calcula el polinomio de Taylor de las siguientes funciones en el grado indicado y en torno al punto indicado. Para las funciones en los incisos marcados con (*), expresa el residuo en la forma de Lagrange y en la forma integral.

(i*) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen}(x)^2$, grado 4 en 0;
(ii*) $f(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, grado 4 en 0;
(iii*) $f(x) = e^{e^x}$, grado 3 en 0;
(iv*) $f(x) = \sin(x)$, grado $2n$ en $\frac{\pi}{2}$;
(v*) $f(x) = \cos(x)$, grado $2n$ en π.
(vi*) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4, en 0;
(vii*) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4, en 1;
(viii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, grado $2n+1$, en 0.

2. Escribe cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x-3)$. (Basta calcular el polinomio de Taylor en 3, del mismo grado que el polinomio original. ¿Por qué?)

(i) $x^2 - 4x - 9$;
(ii) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$;
(iii) $ax^2 + bx + c$;

3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

¿Cuál es el máximo grado de polinomio de Taylor centrado en 0 que es posible calcular para f si consideramos la forma del residuo de Lagrange? Justifica tu respuesta.

4. Calcular e con siete cifras decimales correctas.

5. Escribir una suma utilizando la notación Σ que sea igual a cada uno de los siguientes números con el grado de aproximación que se especifica.

(i) $\sin(1)$ con error $< 10^{-17}$;
(ii) e^2 con error $< 10^{-5}$.

6. (i) Demostrar que

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

siempre que $x \neq y$ y, además, x, y y $x+y$ no sean de la forma $k\pi/2$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. (Utilizar las fórmulas de la suma para sin y cos).

(ii) Demostrar que

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

indicando las restricciones necesarias para x y y. (Indicación: Sustituir x por $\arctan(x)$ y y por $\arctan(y)$ en el inciso (i)).

(iii) Demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3},$$
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

(iv) Demostrar que $\pi = 3.14159...$, es decir, que π es un número cuya parte entera es 3 y obtener sus primeros 5 decimales. (Indicación: Aplicar la segunda expresión obtenida en el inciso anterior).

7. Supóngase que a_i son los coeficientes de los polinomios de Taylor en torno a a de la función f y supóngase que f es integrable en el intervalo $[a, b]$. En otras palabras, $a_i = f^{(i)}(a)/i!$. Encuentra los coeficientes c_i del polinomio de taylor en torno a a de la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

8. (i) Demostrar que el polinomio de Taylor de $f(x) = \sin(x^2)$ de grado $4n + 2$ en 0 es

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Indicación: Si P es el polinomio de Taylor de grado $2n + 1$ para $\sin(x)$ en torno a 0, entonces $\sin(x) = P(x) + R(x)$, donde $\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^{2n+1}} = 0$. ¿Qué implica esto para $\lim_{x\to 0} \frac{R(x^2)}{x^{4n+2}}$?

(ii) Hallar $f^{(k)}(0)$ para todo $k \in \mathbb{N}^+$.

(iii) En general, si $f(x) = g(x^n)$, hallar $f^{(k)}(0)$ en términos de las derivadas de g en 0.

9. Supongamos que la función $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

(i) f y f' son continuas en $[0, 1]$ y f'' existe en $(0, 1)$;

(ii) $f'(0) = f'(1) = 0$;

(iii) $|f''(x)| \le 1$ para todo $x \in (0, 1)$.

Demuestra que entonces $|f(\frac{1}{2}) - f(0)| \le \frac{1}{8}$ y que $|f(1) - f(0)| \le \frac{1}{4}$.

10. Sea $f(x) := e^x$. Demuestra que el término correspondiente al residuo en el Teorema de Taylor converge a 0 cuando $n \to \infty$ para cada x_0 predeterminada y para cada x.

11. (i) Supóngase que f es dos veces derivable en $(0, \infty)$ y que M_0 es una constante tal que $|f(x)| \le M_0$ para todo $x > 0$, mientras que M_2 es una constante tal que $|f''(x)| \le M_2$ para todo $x > 0$. Demostrar que, para todo $x > 0$ y para todo $h > 0$ se cumple que

$$|f'(x)| \le \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

(ii) Bajo las hipótesis del inciso anterior, demostrar que para todos los $x > 0$ se tiene que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

(iii) Demostrar que, si f es dos veces derivable en $(0, \infty)$, f'' es acotada y $f(x)$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$, entonces también $f'(x)$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

12. (i) Utiliza el polinomio de Taylor para demostrar que si $f''(x_0)$ existe, entonces

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

El límite de la derecha se denomina la *segunda derivada de Schwarz* de f en x_0.

(ii) Sea $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x^2$ para $x \leq 0$. Demostrar que existe la segunda derivada de Schwarz de f en 0 pero que no existe $f''(0)$.

(iii) Demostrar que si f tiene un máximo local en x_0, entonces la segunda derivada de Schwarz en x_0 es ≤ 0.

13. (i) Demuestra por inducción la regla de Leibniz para la n-ésima derivada de un producto:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

(ii) Considera la función

$$h(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestra que $h^{(n)}(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Concluye que el término correspondiente al residuo del teorema de Taylor para $x_0 = 0$ **no** converge a cero cuando $n \to \infty$ para $x \neq 0$.
Sugerencia: Utiliza el inciso anterior para calcular $h^{(n)}(x)$ para $x \neq 0$. Observa además que, por L'Hôpital, $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x^k} = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \neq 0$.

14. Demostrar que si $x \leq 0$, entonces

$$\left| \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x - t)^n \, dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

15. Demostrar que si $-1 < x \leq 0$, entonces

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

16. Sea $f \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una función tal que $f'' - f = 0$ en $(-1, 1)$ y supongamos que $f(0) = f'(0) = 0$. Demuestra que $f = 0$ en $(-1, 1)$

17. *a*) Supóngase que f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a) = f(b)$ y que para todo $x \in (a, b)$, la segunda derivada de Schwarz de f en x es 0. Demostrar que f es constante en $[a, b]$.

Sugerencia: Supóngase que $f(x) > f(a)$ para algún $x \in (a,b)$. Considérese la función

$$g(x) = f(x) - \varepsilon(x-a)(b-x),$$

con $g(a) = g(b) = f(a)$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tendremos que $g(x) > g(a)$, de modo que g tendrá un máximo M en (a,b). Aplica ahora el problema **12.**. Nota que la segunda derivada de Schwarz de $(x-a)(x-b)$ es su segunda derivada en el sentido usual.

b) Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ cuya segunda derivada de Schwarz es 0 en todos los puntos de (a,b). Demuestra que f es de la forma $f(x) = mx + k$ para algunos $m, k \in \mathbb{R}$. A una función como ésta se le llama *función afín.*

18. Sea $f(x) = x^4 \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ para $x \neq 0$ y definamos $f(0) = 0$. Demuestra que $f = 0$ hasta el oden 2 en 0, a pesar de que no existe $f''(0)$.