

Tarea 5

1. Utiliza el criterio de comparación o el de límite, según convenga, para determinar cuáles de las siguientes series son convergentes y cuáles son divergentes.

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\theta)}{n^2}$.

(II) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$.

(III) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

(IV) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$.

(V) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^k}$, para alguna $k \in \mathbb{N}^+$.

(VI) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^n}$.

(VII) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

(VIII) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(IX) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n)}$.

2. Utiliza el criterio del cociente para determinar cuáles de las siguientes series son convergentes y cuáles son divergentes.

(I) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

(II) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(III) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

(IV) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

3. Utiliza el criterio de la integral para determinar cuáles de las siguientes series son convergentes y cuáles son divergentes.

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$.

(II) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$.

(III) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^2}$.

4. (a) Sea $p \in \mathbb{N}^+$ un natural positivo fijo. Considera las sumas parciales para probar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+p)}$$

converge al número

$$\frac{\sum_{j=1}^p \frac{1}{j}}{p}.$$

(b) Determina si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{2^k}$$

es convergente.

(c) Utiliza el criterio de comparación para probar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k+1)(k+2)^2}$$

es convergente.

5. Sea (a_n) una sucesión real tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Considera las sumas parciales

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{y} \quad S_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

y utilízalas para demostrar que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

6. Definimos al número e como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Demuestra que la sucesión de sumas parciales consta de números positivos y que es monótona creciente y acotada. Concluye que el número e , definido como dicho límite, existe.

Sugerencia para encontrar una cota superior: Compara con una suma de una progresión geométrica adecuada.

7. Demuestra que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ es convergente.

8. Determina para cada una de las siguientes afirmaciones si ésta es verdadera o falsa. Da prueba o contraejemplo según sea el caso.

(a) Si $k^2 a_k \rightarrow 0$, entonces $\sum a_k$ es convergente.

(b) Si $\sum a_k$ es convergente, entonces $\sum a_k^2$ es convergente.

(c) Si $\sum a_k$ converge absolutamente, entonces $\sum a_k^2$ es convergente.

(d) Si $\sum a_k^2$ es convergente, entonces $\sum a_k^3$ es convergente.

9. Para las siguientes sucesiones (a_k) , determina si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.

(a) $a_k := \frac{(2k+1)(3k-1)}{(k+1)(k+2)^2}$;

(b) $a_k := \frac{1}{k^{1/k}}$;

(c) $a_k := \binom{2k}{k}^{-1} (4 - 10^{-23})^k$.

10. Para cada una de las siguientes series de potencias de la forma $\sum c_k x^k$, determina cuál de las siguientes opciones es verdadera:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$;

- (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$ converge sólo para $x = 0$;
- (iii) existe un $R > 0$ tal que si $|x| < R$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$ converge y si $|x| > R$, entonces la serie diverge. En este caso, determina cuál es el $R > 0$ para el que esto ocurre.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2023} x^k$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k^4}$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{k!}$;

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$.

11. Criterio de la raíz n-ésima para convergencia de series. Sea (a_n) una sucesión tal que existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

con $L \in \mathbb{R}$.

Demuestra que:

(a) Si $0 \leq L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

(b) Si $L > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(c) Construye sucesiones (a_n) y (b_n) para mostrar que, si el límite anterior es tal que $L = 1$, puede ocurrir tanto que la serie converga absolutamente, como que no converja.

12. Sucesiones sumable Cesaro.

a) Sea (a_n) una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$. Demuestra que entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \ell.$$

b) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **sumable Cesaro**, y que la suma de Cesaro es ℓ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = \ell,$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}^+$, $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$.

1) ¿Qué implica el inciso anterior para las sucesiones sumable Césaro?

2) Encuentra una sucesión que *no* sea sumable, pero que sí sea sumable Césaro.

13. Supóngase que (a_n) es una sucesión tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ y que (a_n) es sumable Cesaro. Supóngase también que la sucesión (na_n) es acotada. Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Sugerencia: Si $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ y $\sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$, demuestra que $s_n - \frac{n}{n+1} \sigma_n$ es una sucesión acotada.

14. Demuestra que la integral $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ es convergente pero que $\int_0^{\infty} \frac{|\text{sen}(x)|}{x} dx$ diverge.

Sugerencia:

- a) Para demostrar que si $a > 1$ está fijo entonces la integral impropia $\int_a^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ es convergente, utiliza la fórmula de integración por partes para mostrar que, para cualquier $b > a$,

$$\int_a^b \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{\cos(a)}{a} - \frac{\cos(b)}{b} - \int_a^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

Luego, toma límite cuando $b \rightarrow \infty$. Puede ser útil observar primero cómo es $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx$.

- b) Para demostrar que si $b > 0$ está fijo entonces la integral $\int_0^b \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ existe, observa que $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ es una función que coincide en el intervalo $(0, b]$ con una función que es continua en $[0, b]$. (¿Quién es esa función?).
- c) Para demostrar que $\int_0^\infty \frac{|\text{sen}(x)|}{x} dx$ es divergente, utiliza el inciso (a) para mostrar primero que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{|\text{sen}(x)|}{x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \infty.$$

15. Encontrar una función $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \geq 0$ para todo x , tal que $\int_0^\infty f(x) dx$ existe pero no existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
16. Sea f la función cuya gráfica es la de la siguiente figura. Encuentra $\int_0^1 f(x) dx$ y también el área de la región sombreada.

