Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral III 2024-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 1

1. Demuestre las siguientes propiedades del producto punto en $\mathbb{R}^n$:

a) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2 \geq 0$ y $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ si y sólo si $\vec{x} = 0$;

b) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$;

c) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$;

d) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y})$.

2. Demuestre que para toda $m \in \mathbb{N}^+$ y cualesquiera vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + ... + \vec{x}_m\| \leq \|\vec{x}_1\| + \|\vec{x}_2\| + ... + \|\vec{x}_m\|.$$

3. Demuestre el Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$, es decir, que si $1 \leq k \leq n$ y si para cualesquiera $1 \leq i < j \leq k$ se tiene que $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = 0$, entonces

$$\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + ... + \vec{x}_k\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 + ... + \|\vec{x}_k\|^2.$$

4. Demuestre las siguientes afirmaciones, realice un diagrama de lo que significan y describa su interpretación geométrica.

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ si y sólo si $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$;

b) $\vec{x} \cdot \vec{y} > 0$ si y sólo si $\|\vec{x} + \vec{y}\| > \|\vec{x} - \vec{y}\|$;

c) $\vec{x} \cdot \vec{y} < 0$ si y sólo si $\|\vec{x} + \vec{y}\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|$;

d) Si $\vec{y} \neq \vec{0}$, entonces $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ si y sólo si $\exists \lambda \in [0, \infty)$ tal que $\vec{x} = \lambda \vec{y}$;

e) Si $\vec{y} \neq \vec{0}$, entonces $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ si y sólo si $\exists \lambda \in (-\infty, 0]$ tal que $\vec{x} = \lambda \vec{y}$;

f) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$;

g) $|\, \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \,| \leq \|\vec{x} \pm \vec{y}\|$

5. Demuestre que si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ y $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, entonces el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{y}$ es $\frac{\pi}{3}$. ¿Qué interpretación geométrica tiene esto?

6. Sean $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

a) Sean $B^{(1)}(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{y}\|_1 < r\}$ y $B^{(\infty)}(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty < r\}$. Demuestre que estos conjuntos son abiertos en $\mathbb{R}^n$.

b) Demuestre que $\text{ext}(B(\vec{x}, r)) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{y} - \vec{x}\| > r\}$ y
$\text{Fr}(B(\vec{x}, r)) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{y} - \vec{x}\| = r\}$.

7. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Establezca la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, dando prueba o contraejemplo. En caso de que alguna de las igualdades sea falsa, establezca si hay al menos una de las contenciones que sí sea válida en general.

a) $\text{int}(A \cup B) = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$; $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$;

b) $\text{ext}(A \cup B) = \text{ext}(A) \cup \text{ext}(B)$; $\text{ext}(A \cap B) = \text{ext}(A) \cap \text{ext}(B)$;

c) $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$; $\text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$.

8. Pruebe que si A es un conjunto cerrado, entonces $\text{int}(\text{Fr}(A)) = \emptyset$.

9. Demuestre que el conjunto $A = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ y } y = 0\}$ es un conjunto abierto.

10. Sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i < b_i$. Demuestre que

$$A := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

es un conjunto abierto.

11. Sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i \leq b_i$. Demuestre que el paralelepípedo

$$A := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

es un conjunto cerrado.

12. Muestre que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, entonces el producto cartesiano

$$A \times B = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \vec{x} \in A \text{ y } \vec{y} \in B\}$$

es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$.

13. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío.

Consideremos $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times ... \times \mathbb{Q} = \{(q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \in 1, ..., n \, q_i \in \mathbb{Q}\}$. Muestre que:

a) $U \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$;

b) U se puede expresar como una unión de bolas con centro en $\mathbb{Q}^n$ y radio racional.

14. Sean $A_1, ..., A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que:

a) Si cada A_i es abierto, entonces $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ y $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k$ son conjuntos abiertos.

b) Si cada A_i es cerrado, entonces $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ y $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k$ son conjuntos cerrados.

¿Qué ocurre si en vez de una cantidad finita tenemos una cantidad infinita de conjuntos abiertos o cerrados? Demuestre su respuesta.

15. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:

a) Si $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B'$;

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

c) $(A \cap B)' = A' \cap B'$.

16. Sea $A = ([0,1] \times [0,1]) \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Calcule A' y $\overline{A}$. Demuestre sus respuestas.

17. Sea $A = \{(m, 0) \in \mathbb{R}^2 : m \in \mathbb{Z}\}$.

a) Calcule $\text{int}(A)$, $\text{Fr}(A)$, $\text{ext}(A)$, A' y $\overline{A}$. Demuestre sus respuestas.

b) Establezca si A es abierto, cerrado o ninguna de las dos. Demuestre sus respuestas.

18. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

a) $\vec{x} \in \overline{A}$ si y sólo si $\forall r > 0$ se tiene que $B(\vec{x}, r) \cap A \neq \emptyset$;

b) A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$;

c) A es cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$;

d) $A \cup A' = \overline{A}$;

e) $(\overline{A})^c = \text{ext}(A)$;

f) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ y $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

g) $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(A^c)}$;

h) Si $B \subseteq A$ y B es abierto, entonces $B \subseteq \text{int}(A)$, es decir, $\text{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande contenido en A;

i) Si $A \subseteq B$ y B es cerrado, entonces $\overline{A} \subseteq B$, es decir, $\bar{(}A)$ es el conjunto cerrado más chico que contiene A A.

19. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:

a) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

b) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

c) $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

d) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

20. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

21. Sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i < b_i$. Demuestre que

$$A := (a_1, b_1) \times (a_1, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

es un conjunto convexo.

22. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Pruebe que A es disconexo si y sólo si existen $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que B y C son abiertos, ajenos, no vacíos y $A = B \cup C$.

23. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Demuestre que A es conexo si y sólo si para cada par de puntos $\vec{x}, \vec{y} \in A$, existen $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k \in A$ tales que $[\vec{x}, \vec{x}_1] \cup [\vec{x}_1, \vec{x}_2] \cup ... \cup [\vec{x}_k, \vec{y}] \subseteq A$, donde $[\vec{u}, \vec{v}] := \{\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u}) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\}$ es el segmento de recta que une a $\vec{u}$ con $\vec{v}$.