Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral III 2024-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 2

1. Considere las siguientes funciones definidas para algún subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. En cada caso, identifique al máximo conjunto A en el que están definidas y haga un esbozo de su gráfica.

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ *ii)* $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ *iii)* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

iv) $f(x,y) = xy$ *v)* $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ *vi)* $f(x,y) = x^2 - y^2$

2. Determine los conjuntos de nivel de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
b) $f(x,y) = 2xy$;
c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$;
d) $f(x,y,z) = yz$;
e) $f(x,y) = 3x - 2y$;
f) $f(x,y) = y - \operatorname{sen}(x)$.

3. Determine cuál es el conjunto $f(A)$, si:

a) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (x\cos(y), x\operatorname{sen}(y), x)$ y $A = \mathbb{R}^2$;
b) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (x^2\cos(y), x^2\operatorname{sen}(y), x^2)$ y $A = \mathbb{R}^2$;
c) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (x\cos(y), x\operatorname{sen}(y), x^2)$ y $A = \mathbb{R}^2$.

4. Encuentre una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen coincida con el elipsoide

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

5. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Defina el concepto de límite lateral (por la izquierda y por la derecha) de f en x_0; es decir, defina lo que significa que $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ sea tal que

$$\vec{l} = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

o que

$$\vec{l} = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Para dar estas definiciones, ¿qué condición es necesario que cumpla el punto x_0? ¿es suficiente que $x_0 \in A'$? Justifique su respuesta.

b) Con base en las definiciones anteriores (y suponiendo que x_0 satisface las condiciones que hayan hecho falta), pruebe que

$$\vec{l} = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \vec{l} = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \ \text{ y } \ \vec{l} = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

6. Determine si las siguientes funciones tienen límite en el punto que se indica. Pruebe su respuesta.

i) $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$ en $(0,0)$ *ii*) $f(x,y) = \frac{x^3+xy^2-x^2y-y^3}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$

iii) $f(x,y) = \frac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}$ en $(0,1)$ *iv*) $f(x,y) = \frac{x^2y+x^2}{x^2+y^2+2y+1}$ en $(0,-1)$

v) $f(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$ *vi*) $f(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ en $(0,0,0)$

vii) $f(x,y) = \frac{x^3y^4}{x^4+y^4}$ en $(0,0)$ *viii*) $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ en $(0,0)$

ix) $f(x,y) = \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ *x*) $f(x,y) = \frac{x^2y^5}{x^2+(y-1)^2}$ en $(0,1)$

xi) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(1,0)$.

7. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x}_0 \in A'$. Pruebe que $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{0}$ si y sólo si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \|f(\vec{x})\| = 0$.

8. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$. Definimos $B = A - \vec{x}_0 := \{\vec{x} - \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \in A\}$ y $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como $g(\vec{h}) = f(\vec{x}_0 + \vec{h})$ para cada $\vec{h} \in B$. Pruebe que:

a) $\vec{x}_0 \in A'$ si y sólo si $\vec{0} \in B'$

b) $\vec{l} = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ si y sólo si $\vec{l} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} g(\vec{h})$.

9. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

10. Demuestra que si los siguientes límites existen y son distintos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

entonces no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

11. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y) := \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

a) Demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

b) Demuestra que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

c) ¿Contradice este ejemplo al ejercicio anterior?

12. Determine cuáles de las siguientes sucesiones convergen y, en su caso, cuál es su límite.

(i) $\{\vec{x}_k = (k\operatorname{sen}(1/k), (1+1/k)^k, c^k)\}$, donde $c \in (0,1)$ es una constante;

(ii) $\{\vec{x}_k = (\operatorname{sen}(k)/k, (1+k)^{1/k}, c^k))\}$ donde $c \in (0,1]$ es una constante;

(iii) $\{\vec{x}_k = ((a^k+b^k)^{1/k}, kc^k, (-1)^k(1+1/k))\}$;

(iv) $\{\vec{x}_k = ((k^2+1)^{1/8} - (k+1)^{1/4}, \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k})\}$.

13. Sea $\{\vec{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ que converge al punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que la sucesión de números reales $\{\|\vec{x}_k\|\}$ converge a $\|\vec{x}_0\|$. ¿Es cierto lo recíproco para cualquier $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$?

14. Demuestre que una sucesión $\{x_k\}$ converge a x_0 en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\|_1 \to 0$ y $\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\|_\infty \to 0$.

15. Pruebe que si $\{k_l\}$ es una sucesión creciente de números naturales (es decir que $k_l < k_{l+1}$ para toda $l \in \mathbb{N}$), entonces $l \leq k_l$ para toda $l \in \mathbb{N}^+$).

16. Pruebe que, si $\{\vec{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, entonces cualquier subsucesión $\{\vec{x}_{k_l}\}$ es también una sucesión de Cauchy.

17. Sea $\{\vec{x}_k\}$ una sucesión de Cauchy. Demuestre, directamente de la definición de sucesión de Cauchy, que:

a) la sucesión $\{\vec{x}_k\}$ está acotada

b) si el rango de $\{\vec{x}_k\}$ es finito, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\vec{x}_k = \vec{x}_0$ para toda $k \geq N$

c) si $\{\vec{x}_{k_l}\}$ es una subsucesión de $\{\vec{x}_k\}$ que converge a $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\{\vec{x}_k\}$ converge a $\vec{x}_0$.

18. Sea $\{\vec{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ cuyo rango A es infinito. Pruebe que:

a) si $\vec{x}_0$ es un punto de acumulación de A, entonces existe una subsucesión $\{\vec{x}_{k_l}\}$ de $\{\vec{x}_k\}$ que converge a $\vec{x}_0$.

b) si $\{\vec{x}_k\}$ converge al punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces $\vec{x}_0$ es el único punto de acumulación de A.

19. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

a) $\vec{x}_0 \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{\vec{x}_k\}$ en A tal que $\{\vec{x}_k\}$ converge a $\vec{x}_0$

b) $\vec{x}_0 \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $\{\vec{x}_k\}$ en $A \setminus \{\vec{x}_0\}$ tal que $\{\vec{x}_k\}$ converge a $\vec{x}_0$

c) si $\vec{x}_0$ es un punto aislado de A y $\{\vec{x}_k\} \subset A$ es una sucesión que converge a $\vec{x}_0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\vec{x}_k = \vec{x}_0$ para toda $k \geq N$.

20. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en $\vec{x}_0 \in A$ tal que $f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Pruebe que:

a) existe $\delta > 0$ tal que $f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ para toda $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \cap A$

b) existen $c > 0$ y $\delta' > 0$ tales que $\|f(\vec{x})\| \geq c$ para toda $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta') \cap A$.

21. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pruebe que f es continua en A si y sólo si para todo conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}^m$ existe un conjunto cerrado $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(C) = D \cap A$.

22. Pruebe que las siguientes funciones son continuas en su dominio:

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$

b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$

c) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cualquier función lineal

23. Pruebe que:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y\}$ es un conjunto abierto

b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (zx + zy)/(x^2 + y^2) < 0\}$ es un conjunto abierto

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/x\}$ es un conjunto cerrado.

d) $S^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ es un conjunto cerrado.
Sugerencia: Utilice la pregunta anterior.

24. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Demuestra que existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

25. Un grupo de estudiantes de arquitectura visita, en una práctica de campo, las ruinas de una muralla antigua. La muralla es exactamente circular y su altura, aunque no es constante, varía de manera continua. Su tarea es hallar un punto de la muralla que tenga la misma altura que el punto diametralmente opuesto. No obstante, la muralla forma una circunferencia de 5 kilómetros de diámetro y las y los estudiantes no saben por dónde empezar a buscar. Después de un par de días, un grupo de estudiantes desiste, afirmando que el punto que buscan no existe; otro grupo más terco de estudiantes persiste en la búsqueda. ¿Tienen esperanza de encontrar un punto que esté a la misma altura que aquél que está en el extremo opuesto de la muralla? Argumenta tu respuesta.

26. Sean, $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\vec{x} \in A, \vec{y} \in (A \cup A')^c$ y $f : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $f(0) = \vec{x}$ y $f(1) = \vec{y}$. Pruebe que existe $t \in (0, 1)$ tal que $f(t) \in \partial(A)$.

27. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A, con A conexo y tal que $f(\vec{x}) \neq 0$ para toda $\vec{x} \in A$. Pruebe que $f(\vec{x}) > 0$ para toda $\vec{x} \in A$ o $f(\vec{x}) < 0$ para toda $\vec{x} \in A$.

28. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en A, con A conexo y tal que $\|f(\vec{x})\| \neq 1$ para toda $\vec{x} \in A$. Pruebe que, si $\|f(\vec{x}_0)\| < 1$ para alguna $\vec{x}_0 \in A$, entonces $\|f(\vec{x})\| < 1$ para toda $\vec{x} \in A$.

29. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A, y $B \subset A$ conexo, cerrado y acotado. Pruebe que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(B) = [a, b]$.

30. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y acotado, y $\vec{y} \in A^c$. Pruebe que existe $\vec{x}_0 \in A$ tal que $\|\vec{y} - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$ para todo $\vec{x} \in A$. Muestre, con un ejemplo, que esta afirmación no es válida si no suponemos que A es cerrado. ¿Esta afirmación sigue siendo válida si sólo suponemos que A es cerrado? Pruebe su respuesta.

31. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos no vacíos, cerrados y acotados, tales que $A \cap B = \varnothing$. Pruebe que existen $\vec{x}_0 \in A$ y $\vec{y}_0 \in B$ tales que $\|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$ para todo $\vec{x} \in A$ y para todo $\vec{y} \in B$. Muestre, con un ejemplo, que esta afirmación no es válida si no suponemos que A es cerrado.

32. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua, con A cerrado y acotado. Pruebe que existen $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in A$ tales que $\|f(\vec{x}_0)\| \leq \|f(\vec{x})\| \leq \|f(\vec{x}_1)\|$ para toda $\vec{x} \in A$.

33. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que el conjunto K es compacto si y sólo si toda sucesión $\{\vec{x}_k\} \subset K$ tiene una subsucesión $\{\vec{x}_{k_l}\}$ que converge a un punto $\vec{x}_0 \in K$.

34. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva en A, con A cerrado y acotado. Pruebe que $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (la función inversa de f) es continua en $f(A)$. ¿Esta afirmación se sigue cumpliendo si A no es cerrado? Pruebe su respuesta.

35. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal. Pruebe que L es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

36. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Definimos $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$f_A(\vec{x}) = \operatorname{dist}(\vec{x}, A) := \text{ínf}\{\|\vec{x} - \vec{z}\| \mid \vec{z} \in A.\}$$

Pruebe que:

a) $f_A(\vec{x}) = 0$ si y sólo si $\vec{x} \in \bar{A}$

b) f_A es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.
Sugerencia: pruebe que $|f_A(\vec{x}) - f_A(\vec{y})| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$).
$U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$ (*sugerencia*: considere la función $f(\vec{x}) = f_A(\vec{x}) - f_B(\vec{x})$)