Tarea 3

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2+b^2 > 0$ y sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ la recta cuya ecuación cartesiana es $ax+by=0$. Muestre que:

a) Si $v_0 = (x_0, y_0)$ y $v_1 = (x_1, y_1)$ son dos puntos diferentes sobre la recta R, entonces la función $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\gamma(t) = v_0 + t(v_1 - v_0)$$

es una parametrización de R.

b) Si $v_2 = (x_2, y_2)$ es un vector paralelo a la recta R, es decir, tal que $ax_2 + by_2 = 0$, entonces la función $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\gamma(t) = v_0 + tu_2$$

es una parametrización de R.

2. Sea $R \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta determinada por la intersección de los planos $ax+by+cz=0$ y $\tilde{a}x+\tilde{b}y+\tilde{c}z = 0$. Muestre que:

a) Si $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ son dos puntos diferentes que pertenecen a R, entonces la función $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$\gamma(t) = v_0 + t(v_1 - v_0)$$

es una parametrización de R.

b) Si $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ es un vector paralelo a la recta R, es decir, tal que $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$ y $\tilde{a}x_2 + \tilde{b}y_2 + \tilde{c}z_2 = 0$, entonces la función $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$\gamma(t) = v_0 + tu_2$$

es una parametrización de R.

3. Sean $n > 3$, $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^n$ dos vectores distintos y $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se define, por medio de ecuaciones cartesianas, a la recta que pasa por los puntos v_0 y v_1?

b) ¿Cómo se define, por medio de ecuaciones cartesianas, a la recta en la dirección del vector u que pasa por el punto x_0?

c) ¿Cómo definiría, sin usar ecuaciones cartesianas, a la recta que pasa por los puntos v_0 y v_1? ¿Y a la recta que pasa por el punto x_0 y que es paralela al vector u?

4. Sobre la parte exterior de una circunferencia fija de radio $r > 0$ rueda (sin resbalar) otra circunferencia de radio $s > 0$. Encuentre una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ que describa el movimiento de un punto que se encuentre en la circunferencia exterior.

5. Demuestre todas las propiedades algebraicas para la derivada de funciones $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ que enunciamos en clase, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Realice estas demostraciones usando primero las propiedades algebraicas de la derivada para funciones $f\colon I \to \mathbb{R}$ y después sin usar dichas propiedades, es decir, partiendo únicamente de las definiciones.

6. Demuestre la regla de la cadena que demostramos en clase pero sin utilizar la regla de la cadena que conocemos para funciones $f\colon I \to \mathbb{R}$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, es decir, demuestre esta propiedad partiendo directamente de la definición de derivada.

7. Muestre que la curva descrita por la función $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$\gamma(t) := (\operatorname{sen}(2t), 2\operatorname{sen}^2(t), 2\cos(t))$$

pertenece a una esfera con centro en el origen. Calcule su rapidez y muestre que la proyección en el plano XY de su velocidad tiene norma constante.

8. Sea $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ la parametrización de la grafica de f, a la que denotamos por G_f. Supongamos que f es derivable en $t_0 \in I$. Demuestre que:

a) La parametrización γ también es derivable en t_0 y, además, $\gamma'(t_0) = (1, f'(t_0))$.

b) La recta tangente a la curva G_f en el punto $(t_0, f(t_0))$, tal como definimos en clase la recta tangente a una curva, es una parametrización de la recta cuya ecuación está dada por $y = f'(t_0)(x - t_0) + f(t_0)$.

9. Sea $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ una parametrización y sea $t_0 \in I$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) la función γ es derivable en t_0;

b) existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = v \text{ en } \mathbb{R}^n;$$

c) existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + (t - t_0)v)}{t - t_0} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n;$$

d) existe una transformación lineal $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + L(t - t_0))}{t - t_0} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Más aún, muestre que el vector $v \in \mathbb{R}^n$ que aparece en los incisos (b) y (c) es precisamente $v = \gamma'(t_0)$ y que $L(1) = v$.

Interprete geométricamente cada uno de los límites que aparecen en los incisos (b)-(d) y también al conjunto $\{\gamma(t_0) + L(t - t_0) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R}\}$, donde L es la transformación lineal que aparece en el inciso (d).

10. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|u\| = \|v\| = 1$. Encuentre una función derivable $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(a) = u$, $\gamma(b) = v$, y con la propiedad de que $\|\gamma(t)\| = 1$ para todo $t \in [a, b]$.

11. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función derivable. Demuestre que $\|\gamma(t)\|$ es una función constante en I si y sólo si para toda $t \in I$, $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$. Interprete geométricamente.

12. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función derivable y sea $r\colon I \to \mathbb{R}$ definida como $r(t) := \|\gamma(t)\|$. Demuestre que, si t_0 es un maximizante o minimizante local de r, entonces $\gamma(t_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$. Interprete geométricamente.

13. Sea $\gamma\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con funciones coordenadas $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Supongamos que γ es continua en el intervalo $[a,b]$, derivable en (a,b), y que $\gamma'(t) \neq 0$ para toda $t \in (a,b)$. Demuestre que existen $\xi \in (a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \lambda \gamma'(\xi).$$

14. Sea $\gamma\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con funciones coordenadas $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Supongamos que γ es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b). Demuestre que existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|^2 = (b-a)\gamma'(\xi) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)).$$

15. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

a) Demuestre que si existen $v_0, u \in \mathbb{R}^n$ tales que $\gamma(t) = v_0 + tu$ para toda $t \in I$, entonces $\|\gamma'(t)\|$ es constante.

b) Muestre con un ejemplo que el recíproco de la afirmación del inciso anterior es falso.

c) Demuestre que si $\gamma''(t) = 0$ para toda $t \in I$, entonces existen $v_0, u \in \mathbb{R}^n$ tales que $\gamma(t) = v_0 + tu$ para toda $t \in I$.

d) Proporcione un ejemplo de una función $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que parametrice un recta y para la cual se satisfaga que $\gamma''(t) \neq 0$ para toda $t \in I$.

Interprete las afirmaciones de los incisos anteriores en el contexto en el que γ describe el movimiento de un objeto.

16. Dada $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una función continua con $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$, definimos

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t)\,dt, \int_a^b \gamma_2(t)\,dt, ..., \int_a^b \gamma_n(t)\,dt\right).$$

Demuestre que:

a) si $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ es un vector constante, entonces $\int_a^b v \cdot \gamma(t)\,dt = v \cdot \int_a^b \gamma(t)\,dt$.

b)
$$\left\|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|\,dt.$$

Sugerencia: Muestre primero que, para toda $s \in [a,b]$,

$$\gamma(s) \cdot \int_a^b \gamma(t)\,dt \leq \|\gamma(s)\| \left\|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right\|.$$

Integre y utilice el inciso anterior.

c) Si γ tiene derivada continua en $[a,b]$, entonces $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \ell(\gamma)$. Interprete geométricamente.

17. Considere las funciones $\gamma\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$ y $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(u) := \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)$. Demuestre que γ es una reparametrización de σ.

18. Sea $\gamma\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Muestre que $\ell(\gamma) = b - a$.

b) Muestre con un ejemplo que la *longitud de* C puede no coincidir con la longitud derminada por γ, es decir, con $\ell(\gamma)$.

19. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Pruebe que si C está contenida en una recta, entonces para toda $s \in I$, $k(s) = 0$. ¿Contradice esto lo que se pide ejemplificar en el inciso (d) del ejercicio **??**? Justifique su respuesta.

20. Pruebe el recíproco del problema anterior, es decir, que si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva suave y $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización por longitud de arco de C tal que, para toda $s \in I$, $k(s) = 0$, entonces C está contenida en una recta.

21. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $T(s)$ es el vector tangente unitario y $\theta(s,h)$ representa al ángulo formado por los vectores $T(s)$ y $T(s+h)$, pruebe que

$$k(s) = \lim_{h\to 0} \left| \frac{\theta(s,h)}{h} \right|.$$

Sugerencia: Utilice la ley de los cosenos.

22. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Si $B(s)$ es el vector binormal unitario y $\theta(s,h)$ representa al ángulo formado por $B(s)$ y $B(s+h)$, pruebe que

$$\tau(s) = \pm \lim_{h\to 0} \left| \frac{\theta(s,h)}{h} \right|.$$

23. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Demuestre que, si para toda $s \in I$ se cumple que $\gamma''(s) \neq 0$, entonces

$$\tau(s) = \frac{[\gamma'(s) \times \gamma''(s)] \cdot \gamma'''(s)}{\|\gamma''(s)\|^2}.$$

24. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Demuestre que, para toda $s \in I$,

$$\|N'(s)\|^2 = (k(s))^2 + (\tau(s))^2.$$

25. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Demuestre que si C está contenida en un plano, entonces para toda $s \in I$, $\gamma'(s)$ está en un plano. ¿Es cierto lo recíproco?. Pruebe su respuesta.

26. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Demuestre que C está contenida en un plano si y sólo si, para toda $s \in I$, $\tau(s) = 0$.

27. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Pruebe que si la curvatura $k(s)$ es una constante (distinta de cero), y si para toda $s \in I$ $\tau(s) = 0$, entonces la curva descrita por γ es (o está contenida en) una circunferencia.
Sugerencia: Demuestre que el centro de la circunferencia osculadora en $\gamma(s)$, al que denominamos *centro de curvatura* en $\gamma(s)$, es el mismo para toda $s \in I$ usando la expresión para $N'(s)$ que demostramos en clase.

28. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Demuestre que si para cada $s \in I$ la recta normal a C dada por $\gamma(s) + tN(s)$, $t \in \mathbb{R}$, pasa por un punto fijo $v_0 \in \mathbb{R}^3$, entonces C está contenida en una circunferencia con centro en v_0.
Sugerencia: Demuestre que la distancia entre $\gamma(s)$ y v_0 es constante.

29. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^2$. Pruebe que si la curvatura $k(s)$ es una constante (distinta de cero), entonces la curva descrita por γ es (o está contenida en) una circunferencia.
Sugerencia: Utilice el problema **??**

30. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo, definimos $J := \{s \in \mathbb{R} : t_0 - s \in I\}$ y $\tilde{\gamma}\colon J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ como $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t_0 - s)$. Demuestre que:

a) $\tilde{\gamma}$ es una parametrización por longitud de arco de C.

b) Si $T(s)$, $\tilde{T}(s)$, $N(s)$, $\tilde{N}(s)$, $k(s)$, $\tilde{k}(s)$ son los vectores tangente unitario, normal unitario y la curvatura corresondientes a las parametrizaciones γ y $\tilde{\gamma}$, respectivamente, entonces para toda $s \in J$ se cumple que:
1) $\tilde{T}(s) = -T(t_0 - s)$;
2) $\tilde{N}(s) = N(t_0 - s)$;
3) $\tilde{k}(s) = k(t_0 - s)$.

c) Si $n = 3$ y $B(s)$, $\tilde{B}(s)$, $\tau(s)$ y $\tilde{\tau}(s)$ son los vectores binormal unitario y la torsión correspondientes a las parametrizaciones γ y $\tilde{\gamma}$, respectivamente, entonces para toda $s \in J$ se cumple que:
1) $\tilde{B}(s) = -B(t_0 - s)$ y
2) $\tilde{\tau}(s) = \tau(t_0 - s)$.

d) Si $n = 3$ y $B(s)$, se satisfacen las fórmulas de Frenet-Serret escribiendo sus elementos en términos de $\tilde{\gamma}$.

31. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva suave $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Definimos $\tilde{T}(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ y, bajo el supuesto de que para toda $t \in I$, $\tilde{T}'(t) \neq 0$, hacemos $\tilde{N}(t) = \frac{\tilde{T}'(t)}{\|\tilde{T}'(t)\|}$ y $\tilde{B}(t) := \tilde{T}(t) \times \tilde{N}(t)$. Si $\tilde{\gamma}$ es la parametrización por longitud de arco de C que se construyó en clase, y $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ son los vectores determinados por $\tilde{\gamma}$ de acuerdo a la definición de clase, demuestre que $\tilde{T} = T \circ \alpha$; $\tilde{N} = N \circ \alpha$ y $\tilde{B} = B \circ \alpha$, donde α es la función de longitud de arco.

32. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva suave $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Sean $\tilde{\gamma}$, α, $\tilde{T}$, $\tilde{N}$ y $\tilde{B}$ como en el problema anterior. Demuestre que:

a) Si $\tilde{k}(t) = \|\tilde{T}'(t)\|$, entonces para toda $t \in I$, $k \circ \alpha(t) = \frac{\tilde{k}}{\|\gamma'(t)\|}$, donde $k(\alpha(t)) = \|\tilde{\gamma}''(\alpha(t))\|$ es la curvatura de C para $s = \alpha(t)$.

b) Para toda $t \in I$, $\tilde{B}'(t) \cdot \tilde{B}(t) = 0 = \tilde{B}'(t) \cdot \tilde{T}(t)$.

c) Para toda $t \in I$, $\tilde{B}'(t)$ es un múltiplo escalar del vector $\tilde{N}(t)$.

d) Para cada $t \in I$ denotemos por $-\tilde{\tau}(t)$ al escalar tal que $\tilde{B}'(t) = -\tilde{\tau}(t)\tilde{N}(t)$, que existe gracias al inciso anterior. Demuestre que, para todo $t \in I$, $\tau(\alpha(t)) = \frac{\tilde{\tau}(t)}{\|\gamma'(t)\|}$. Aquí, $\tau(\alpha(t))$ es la torsión de C para $s = \alpha(t)$.

e) Para toda $t \in I$, $\tilde{N}'(t) = -\tilde{k}(t)\tilde{T}(t) + \tilde{\tau}(t)\tilde{B}(t)$.

33. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva suave. Pruebe que la curvatura k en cada punto $\gamma(t)$ está dada por

$$\frac{\left(\|\gamma'(t)\|^2\|\gamma''(t)\|^2 - (\gamma'(t) \cdot \gamma''(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

34. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva suave y supongamos que, para toda $t \in I$, $\gamma''(t) \neq 0$. Demuestre que la curvatura k y la torsión τ en cada punto $\gamma(t)$ están dadas por:

a) $k = \frac{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$ y

b) $\tau = \frac{[\gamma'(t)\times\gamma''(t)]\cdot\gamma'''(t)}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|^2}$.

35. Sea $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva suave. Pruebe que si la curvatura k es constante (distinta de cero) en C, y si la torsión τ es cero en cada punto $\gamma(t)$, entonces la curva descrita por γ es (o está contenida en) una circunferencia.

36. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Demuestre que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f está dada por

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

37. Sean $a, b, \omega \in \mathbb{R}$ y sea $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la parametrización definida como

$$\gamma(t) := (a\,\cos(\omega t), a\,\mathrm{sen}(\omega t), bt).$$

a) Calcule la parametrización por longitud de arco de la curva definida por γ.

b) Calcule los vectores $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ en cada punto de esta curva.

c) Calcule la curvatura, el radio de curvatura y la torsión en cada punto de esta curva.

38. Un objeto gira (en el sentido de las manecillas del reloj) sobre una circunferencia centrada en el origen y de radio R con rapidez constante r. Si el objeto se desprende de la circunferencia en el punto $(-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$, ¿en qué punto y en cuánto tiempo interseca al eje Y ? ¿Cuál debería ser la rapidez del objeto sobre la circunferencia para que alcance el mismo punto en la mitad del tiempo?.

39. Un ratón se mueve con rapidez constante r sobre una circunferencia de radio R. Un gato, también con rapidez constante r, persigue al ratón, empezando desde el centro de la circunferencia, y de tal forma que el ratón, el gato y el centro de la circunferencia siempre son colineales. ¿Alcanza el gato al ratón? ¿en qué punto? ¿en qué tiempo?.

40. La posición en $\mathbb{R}^3$ de un objeto de masa $m > 0$ está dada por la función $\gamma(t)$. Suponga que la fuerza $F \in \mathbb{R}^3$ que se ejerce sobre el objeto en la posición $\gamma(t)$ produce su movimiento y es tal que $F(\gamma(t)) = \alpha(t)\gamma(t)$, donde para toda $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t) \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

a) El objeto se mueve sobre un plano.
Sugerencia: Considere el producto cruz $\gamma(t) \times \tilde{\gamma}'(t)$ y use la Segunda Ley de Newton.

b) Suponiendo que la curva descrita es cerrada, pruebe que el movimiento del objeto satisface la Segunda Ley de Kepler.
Sugerencia: Proceda como en la prueba de la proposición en la que se muestre que un objeto satisface la Segunda Ley de Kepler.