Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral III 2024-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 5

En toda esta tarea, U y V denotan conjuntos abiertos en el espacio euclidiano en el que se encuentren.

1. Sean $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G\colon V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $v_0 \in U$ y $y_0 \in V$ tales que $G(y_0) = v_0$. Pruebe que, si f alcanza un valor máximo (mínimo) local en v_0 y G es continua en y_0, entonces $f \circ G$ alcanza un valor máximo (mínimo) local en y_0. ¿Este resultado sigue siendo cierto si G no es continua en y_0? Pruebe su respuesta.

2. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y $f(x,y) := ax^n + by^n$, con $ab \neq 0$. Muestre que el $(0,0)$ es el único punto crítico de f y determine su tipo en términos de a, b y n.

3. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en U y sea $v_0 \in U$ un punto crítico de f. Demuestre que si la hessiana de f en v_0 es una forma cuadrática semidefinida negativa no degenerada, entonces f tiene un máximo local en v_0.

4. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en U y sea $v_0 \in U$ un punto crítico de f. Demuestre que si f tiene un máximo local en v_0, entonces la hessiana de f en v_0 es una forma cuadrática semidefinida negativa.

5. Sea $v_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ un punto crítico de una función f de clase C^2 en una vecindad de $v_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(v_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(v_0) < 0$$

para algunas $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, con $i \neq j$. Pruebe que v_0 es un punto silla de f.

6. Sea $v_0 = (x_0, y_0)$ un punto crítico de una función f de clase C^2 en una vecindad de $v_0 \in \mathbb{R}^2$, tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(v_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(v_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(v_0)\right)^2 < 0.$$

Pruebe que v_0 es un punto silla de f.
Sugerencia: Observe que la cantidad anterior está relacionada con el discriminante del polinomio de grado 2 que se obtiene en la variable m al evaluar $H_{f,v_0}(1, m)$, para $m \in \mathbb{R}$.

7. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \left(y - 3x^2\right)\left(y - x^2\right)$. Pruebe que:

a) el origen es un punto crítico de f;

b) si $a, b \in \mathbb{R}$ y $g(t) = (at, bt)$ con $t \in \mathbb{R}$, entonces $f \circ g$ tiene un mínimo local en $t = 0$;

c) el origen no es un mínimo local de f.

8. Sea $f(x,y) = -\left(x^2 - 1\right)^2 - \left(x^2 y - x - 1\right)^2$. Pruebe que:

a) f sólo tiene dos puntos críticos;

b) ambos puntos críticos son máximos locales;

c) ¿se puede presentar una situación análoga para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$? Pruebe su respuesta.

9. Sea $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$. Pruebe que:

a) f sólo tiene un punto crítico;

b) el punto crítico es un máximo local;

c) f no tiene un máximo global;

d) ¿se puede presentar una situación análoga para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$? Pruebe su respuesta.

10. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = xy - y + x - 1$ sobre el conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

11. Sean $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ puntos en $\mathbb{R}^2$ con $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Pruebe que:

a) la función

$$d(m,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + b))^2$$

alcanza un valor mínimo en $\mathbb{R}^2$. Encuentre los valores m_0 y b_0 para los cuales se alcanza este valor mínimo (la recta $y = m_0x + b_0$ es la que "mejor" aproxima a los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Al método que se usa para calcular m_0 y b_0 se le conoce como el método de los cuadrados mínimos y es un método de estimación con importantes aplicaciones en física, estadística, matemáticas financieras, etc).

b) si m_0 y b_0 son los valores del inciso anterior, pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (m_0x_i + b_0)) = 0;$$

c) si $n = 2$ (es decir, sólo se toman dos puntos), entonces $y = m_0x + b_0$ es la recta que pasa por dichos puntos.

12. Encuentre los extremos de f relativos a S, donde:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $S = \left\{(x, \cos(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$;

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 2 + x^2 + y^2\right\}$.

13. Escriba el número 120 como suma de tres números, de modo que la suma de sus productos, tomados de dos en dos, sea máxima.

14. Una compañía planea fabricar cajas rectangulares cerradas con un volumen de 8 litros. El material para la base y la tapa cuesta el doble que el que se usa para los lados. Encuentre las dimensiones para las cuales el costo es mínimo.

15. Tres alelos (formas mutantes de genes) **A**, **B** y **O** determinan los cuatro tipos sanguíneos: **A** (**AA** o **AO**), **B** (**BB** o **BO**), **O** (**OO**) y **AB**. La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción P de individuos de una población que llevan dos alelos diferentes es $P = 2pq + 2pr + 2qr$, donde p, q y r son las proporciones de los alelos **A**, **B** y **O** que se presentan en dicha población, respectivamente. Use el hecho de que $p + q + r = 1$ para demostrar que $P \leq 2/3$.

16. Sea $P \in S = N_{1,f} \subseteq \mathbb{R}^3$ con f de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. Supóngase que P es un punto donde se maximiza la distancia del origen a S. Pruebe que el vector que sale del origen y termina en P es perpendicular a S.

17. Sea A una matriz de 3×3, simétrica y diferente de la matriz cero. Definimos la forma cuadrática $f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x,y,z)A(x,y,z)^t$ y $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}$. Pruebe que:

a) si $v_0\in S$ es un punto en donde f alcanza su valor máximo (o mínimo) sobre S, entonces v_0 es un vector propio de A, es decir, que existe λ tal que $Av_0=\lambda v_0$;

b) existe $v_0\in S$ tal que v_0 es un vector propio de A correspondiente a un valor propio distinto de cero, es decir, que existe $\lambda\neq 0$ tal que $Av_0=\lambda v_0$.

18. Sean $a_1,\ldots,a_k$ números reales positivos. Use multiplicadores de Lagrange para probar que:

$$(a_1\cdots a_k)^{1/k}\leq \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}.$$

19. Sean $a_i,b_i\geq 0$ para $i=1,\ldots,n$, y $p,q>1$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

a) Use multiplicadores de Lagrange para demostrar que

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n\leq \left(a_1^p+\cdots+a_n^p\right)^{1/p}\left(b_1^q+\cdots+b_n^q\right)^{1/q}$$

Esta desigualdad es conocida como la *desigualdad de Hölder*.

b) Use la desigualdad anterior para probar que

$$\left((a_1+b_1)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p\right)^{1/p}\leq \left(a_1^p+\cdots+a_n^p\right)^{1/p}+\left(b_1^p+\cdots+b_n^p\right)^{1/p}$$

Esta desigualdad es conocida como la *desigualdad de Minkowski*.

20. Sea $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ derivable en cada punto $v\in U$. Pruebe que:

a) la gráfica de f, a la que denotamos como G_f, es una superficie suave en todos sus puntos;

b) si $v_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in G_f$, el plano tangente a G_f en v_0 calculado de acuerdo con la definición que utiliza al gradiente de f es el mismo que se obtiene si se calcula de acuerdo con la definición que vimos en clase a partir de la derivada de la parametrización de G_f.

21. Sea $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ derivable en el punto $v_0\in U$. Pruebe que existen $r>0$ y $M>0$ tales que

$$\frac{\|f(v)-f(v_0)\|}{\|v-v_0\|}\leq M$$

para toda $v\in B_r(v_0)\setminus\{v_0\}\subseteq U$.

22. Sean $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $g\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ derivables en el punto $v_0\in U$. Pruebe que la función $(fg)(v)=f(v)g(v)$ es derivable en $v_0\in U$ y dé una fórmula para la derivada $D(fg)(v_0)$.

23. Abusar de la notación (como de cualquier otra cosa) suele causar problemas. En particular, usar letras (que casi siempre denotan variables) para referirse también a funciones nos puede llevar a errores. Sea $w=f(x,y,z)$ y $z=g(x,y)$. Por la regla de la cadena, se tiene que:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Como x y y son variables independientes, se sigue que $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, y como $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, se tiene que:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Así, $\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Si $f(x, y, z) = 2x + y + 3z$ y $g(x, y) = 5x + 18$, entonces $\frac{\partial w}{\partial z} = 3$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 5$ y, por lo tanto, $0 = 15$. ¿Cuál es el error?

24. Sean f y g definidas como

$$f(u, v) = (u\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v))$$

con $0 < u$ y $-\pi/2 < v < \pi/2$, y

$$g(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x)\right)$$

con $0 < x$. Calcule $D(f \circ g)(x, y)$ y $D(g \circ f)(u, v)$.

25. a) Suponga que la variable w está en función de las variables x, y, z y t (es decir, $w = f(x, y, z, t)$), que $x = g(u, z, t)$ y que $z = h(u, t)$. Tomando en cuenta todas estas relaciones, calcule $\frac{\partial w}{\partial t}$.

b) Si

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= 2xy + 3z + t^2 \\ g(u, z, t) &= ut\,\mathrm{sen}(z) \\ h(u, t) &= 2u + t, \end{aligned}$$

calcule $\frac{\partial w}{\partial t}$ para $u = 1, t = 2$ y $y = 3$.

26. Suponga que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1) = 1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) = 2$. Si $g(u, v) = \left(u^2 + v, uv\right)$, calcule $\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial v \partial u}(1, 1)$.

27. Sean $f, g\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en U. Pruebe que la función

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), f(x, y, z) + g(x, y, z))$$

es tal que, para toda $(x, y, z) \in U$, la derivada dada por la transofrmación lineal $DF(x, y, z)$ no es invertible.

28. Sean $f, g\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en U. Definimos $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $G\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \quad \text{y} \quad G(x, y) = \|F(x, y)\|^2.$$

Demuestre que no existe $v_0 \in U$ que satisfaga las siguientes dos propiedades:

a) la función G tiene un máximo local en v_0 y

b) la derivada $DF(v_0)$ es invertible como transformación lineal.

29. Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $f\colon U \to V$ una función biyectiva y derivable para toda $v \in U$. Pruebe que, si $f^{-1}\colon V \to U$ es derivable para toda $y \in V$, entonces $Df(v)$ es invertible para toda $v \in U$.

30. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derivable en un punto $v_0 \in \mathbb{R}^n$ y además supóngase que v_0 es un punto fijo de f (es decir, $f(v_0) = v_0$). Si A denota a la matriz jacobiana $J_f(v_0)$ y $k \in \mathbb{N}$, encuentre una función $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derivable en v_0 tal que $g(v_0) = v_0$ y $Dg(v_0) = A^k$.

31. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función que está expresada en términos de las coordenadas cartesianas (x, y, z) de cada punto $v \in U$. Use la función de cambio de coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) a coordenadas cartesianas (x, y, z) y la regla de la cadena para encontrar (en cada punto $v \in U$) una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en la cual se pueda expresar a la derivada de f en v, es decir, $Df(v)$, en términos de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial \rho}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$. Compare con el ejercicio correspondiente de la Tarea 4.

32. Repita el problema anterior ahora para las coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) y compare con el ejercicio correspondiente de la tarea 4.

33. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en U tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) > 0$ para toda $(x, y) \in U$ y sea $(x_0, y_0) \in U$ tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \neq 0$. Definamos $I = \{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in U\}$.

a) Pruebe que existen $\delta > 0$ y $h\colon (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq I \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $f(h(y), y) = f(x_0, y_0)$ para toda $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$.

b) Si definimos $g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(y) = f(x_0, y)$, pruebe que g tiene un máximo (mínimo) local en y_0 si y sólo si h tiene un mínimo (máximo) local en y_0. Interprete geométricamente.

34. Sean $g_1, \ldots, g_m\colon U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, S y $(v_0, y_0) \in S$ como en el teorema de la función implícita. Si

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(v_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(v_0, y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(v_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(v_0, y_0) \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(v_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(v_0, y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(v_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_k}(v_0, y_0) \end{bmatrix},$$

pruebe que

$$Dh(y_0) = -A^{-1}B,$$

donde h es la función cuya existencia es garantizada en el mencionado teorema.

35. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en U y $S = \{v \in U \mid f(v) = cte\}$. Si $v \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $v^{(-i)}$ al elemento de $\mathbb{R}^{n-1}$ que se obtiene de v al "eliminarle" su i-ésima coordenada, con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $v_0 = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right) \in S$.

a) Pruebe que, si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(v_0) \neq 0$, entonces existe $h_i\colon U_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en U_i tal que $v_0^{(-i)} \in U_i$, $h_i\left(v_0^{(-i)}\right) = x_0^{(i)}$ y

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n) \in S$$

para todo $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in U_i$.

b) Si h_i es la función del inciso anterior, calcule $\frac{\partial h_i}{\partial x_{i+1}}\left(v_0^{(-i)}\right)$ para $1 \leq i < n$ y, para $i = n$, calcule $\frac{\partial h_n}{\partial x_1}\left(v_0^{(-n)}\right)$ en términos de derivadas parciales de f.

c) Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(v_0) \neq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, pruebe que

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\left(v_0^{(-1)}\right)\frac{\partial h_2}{\partial x_3}\left(v_0^{(-2)}\right)\cdots\frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n}\left(v_0^{(-(n-1))}\right)\frac{\partial h_n}{\partial x_1}\left(v_0^{(-n)}\right)=(-1)^n.$$

36. Sea $g\colon U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de clase C^1 en U y sea $v_0=(x_0,y_0,z_0)\in U$ tal que $g\left(v_0\right)=0$ y $\frac{\partial g}{\partial z}\left(v_0\right)\neq 0$. Pruebe que:

a) Existen $V\subseteq\mathbb{R}^2$ abierto y $\sigma\colon V\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ de clase C^1 en V, tales que $(x_0,y_0)\in V$ y $g(\sigma(x,y))=0$ para toda $(x,y)\in V$. Interprete geométricamente

b) El plano tangente al conjunto de nivel 0 de g, denotado por $N_{0,g}$ calculado usando la parametrización σ del inciso anterior es el mismo si se calcula usando la definición en términos del gradiente de g.

37. Considere el conjunto de soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}2x+y+2z+u-v-1&=0\\ xy+z-u+2v-1&=0\\ yz+xz+u^2+v&=0\end{aligned}$$

a) Muestre que, en una vecindad del punto $(1,1,-1,1,1)$, las variables x,y y z del conjunto de soluciones se pueden poner en función de las variables u y v.

b) Calcule la derivada de la función del inciso anterior en el punto $(1,1)$.

c) Encuentre, usando el teorema de la función implícita, todas la ternas de variables que se puedan poner en función de las restantes dos en una vecindad del mismo punto.

38. Sea

$$f(x)=\begin{cases}x^2\operatorname{sen}(1/x)+\frac{x}{2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

a) Calcule $f'(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

b) Pruebe que para toda $\delta>0$ existen $x,y\in(-\delta,\delta)$ tales que $f'(x)<0$ y $f'(y)>0$.

c) Pruebe que f no es invertible en ninguna vecindad del cero. ¿Contradice este ejemplo al Teorema de la Función Inversa?

39. Pruebe el teorema de la función inversa a partir del teorema de la función implícita.

40. Sea $g\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ de clase C^1 en U con $n>m$. Pruebe que g no es inyectiva. *Sugerencia:* Utilice inducción sobre m.

41. Sea $g=(g_1,\ldots,g_m):A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ de clase C^1 en A con $n>m$. Sea $v_0\in A$ tal que $g\left(v_0\right)=0$.

a) Si la matriz

$$M=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\left(v_0\right) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}\left(v_0\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}\left(v_0\right) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}\left(v_0\right)\end{bmatrix}$$

es de rango m, pruebe que existen $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ abiertos y $f\colon U\to V$ una biyección de clase C^1 en U (y f^{-1} de clase C^1 en V) tales que $v_0\in V\subseteq A$ y $g\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)=(x_1,\ldots,x_m)$ para todo $(x_1,\ldots,x_n)\in U$.

b) Describa el conjunto $(g\circ f)^{-1}(\{0\})$

c) Use el primer inciso para demostrar que si $Dg\left(v_0\right)$ tiene rango máximo, es decir, tiene rango m, entonces $Dg(v)$ tiene rango máximo para v en una vecindad de v_0

d) Si $Dg\left(v_0\right)$ no tiene rango máximo (es decir, si el rango de $Dg\left(v_0\right)$ es $k<m$) ¿se sigue cumpliendo un resultado análogo al del primer inciso? ¿al del tercer inciso? (es decir, si $Dg\left(v_0\right)$ tiene rango $k<m$ ¿existe una vecindad de v_0 en la que Dg sigue teniendo rango k?). Pruebe sus respuestas

e) Interprete geométricamente.

42. Sea $f(x, y)=\left(e^v \cos (y), e^v \operatorname{sen}(y)\right)$.

a) Pruebe que f no es inyectiva en $\mathbb{R}^2$.

b) Pruebe que, para cualquier $v=(x, y) \in \mathbb{R}^2$, existe $\delta>0$ tal que f es invertible en $B_\delta(v)$.

c) Si $\left(u_0, y_0\right)=f\left(x_0, y_0\right)$, calcule $Df^{-1}\left(u_0, y_0\right)$ en términos de u_0 y v_0.

d) ¿Existe una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que tenga las dos propiedades anteriores? Pruebe su respuesta.

43. Sean $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en U y $A \subseteq U$. Pruebe que, si $\operatorname{det}(Df(v)) \neq 0$ para toda $v \in \operatorname{int}(A)$, entonces $f(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{int}(f(A))$.