Álgebra Superior I 2020-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudante: Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 3

1. Demuestre que el conjunto vacío es único, es decir, que existe un único conjunto que carece de elementos.

2. Sea A el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 6, sea B el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 2 y sea C el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 3. Es decir,

$$A = \{z \in \mathbb{Z} : \exists x(x \in \mathbb{Z} \wedge z = 6k)\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{Z} : \exists x(x \in \mathbb{Z} \wedge z = 2k)\}, \text{ y}$$
$$C = \{z \in \mathbb{Z} : \exists x(x \in \mathbb{Z} \wedge z = 3k)\}.$$

Diga cuáles de las siguientes relaciones de contención son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

(i) $A \subseteq B$ (iv) $C \subseteq A$ (vii) $B \subsetneqq A$ (x) $A \subsetneqq C$
(ii) $A \subseteq C$ (v) $B \subseteq C$ (viii) $A \subsetneqq B$ (xi) $A = B$
(iii) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq B$ (ix) $C \subsetneqq A$ (xii) $A = C$

3. Demuestre lo siguiente para cualesquiera conjuntos A, B y C:

(i) $\varnothing \subseteq A$; (iii) si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$;
(ii) $A \subseteq A$; (iv) si $A \subseteq \varnothing$, entonces $A = \varnothing$.

4. Sea U un conjunto universal. Sean A y B subconjuntos de U. Demuestre lo siguiente:

(i) $A \subseteq B$ si y sólo si $B^c \subseteq A^c$;
(ii) $A = B$ si y sólo si $A^c = B^c$.

5. Sean A y B los siguientes subconjuntos del conjunto universal $\mathbb{Z}$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 7\}.$$

Determine los siguientes conjuntos:

(i) $A \cap B$; (iv) $B \setminus A$; (vii) $A^c \cup B^c$;
(ii) $A \cup B$; (v) $A \triangle B$; (viii) $A^c \cap B^c$;
(iii) $A \setminus B$; (vi) A^c.

6. Sean A y B los siguientes subconjuntos del conjunto universal $\mathbb{R}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - \frac{1}{2}| \leq 3\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq \frac{3}{2}\}.$$

Determine los siguientes conjuntos:

(i) $A \cap B$; (iii) A^c;
(ii) $A \cup B$; (iv) B^c.

7. Sean A y B los siguientes subconjuntos del conjunto universal $\mathbb{R}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}.$$

Determine los siguientes conjuntos:

(i) $A \cap B$; (iii) $(A \cup B)^c$;
(ii) $A \cup B$; (iv) $A^c \cap B^c$.

8. Sean A y B los siguientes subconjuntos del conjunto universal $\mathbb{Z}$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ divide a } 6\}.$$

Determine los siguientes conjuntos:

(i) $A \cap B$; (iv) $B \setminus A$; (vii) $A^c \cup B^c$;
(ii) $A \cup B$; (v) $A \triangle B$; (viii) $A^c \cap B^c$;
(iii) $A \setminus B$; (vi) A^c.

9. Sean A, B y C subconjuntos cualquiera de un conjunto universal U. Demuestre lo siguiente:

(i) $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$;
(ii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
(iii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
(iv) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$;
(v) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
(vi) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
(vii) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
(viii) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
(ix) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$;
(x) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$;
(xi) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
(xii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
(xiii) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$;
(xiv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$;
(xv) $U^c = \varnothing$;
(xvi) $\varnothing^c = U$;
(xvii) $A \cap A^c = \varnothing$;
(xviii) $A \cup A^c = U$;
(xix) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
(xx) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

10. Sean A, B y C subconjuntos cualquiera de un conjunto universal U. Demuestre lo siguiente:

(i) $(A \subseteq B \ \wedge \ A \subseteq C) \iff A \subseteq (B \cap C)$;
(ii) $(A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C) \iff (A \cup B) \subseteq C$;
(iii) $B \subseteq A \iff (A \setminus B) \cup B = A$;
(iv) $A \vartriangle B = \varnothing \iff A = B$;
(v) $A \subseteq B \implies (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$;
(vi) $A \subseteq B \implies (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$;
(vii) $(A \cap B = \varnothing \wedge A \cup B = C) \implies A = C \setminus B$;
(viii) $(A \cup B = U \wedge A \cap B = \varnothing) \iff B = A^c$;
(ix) $A \cup B = U \iff A^c \subseteq B$;
(x) $A \subseteq B^c \iff A \cap B = \varnothing$.

11. Dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones falsas (observe que casi todas son los "regresos" de contenciones o implicaciones que aparecieron antes en la tarea):

(i) $A \subseteq (A \cap B)$;
(ii) $(A \cup B) \subseteq A$;
(iii) $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$;
(iv) $(A \cup C) \subseteq (B \cup C) \implies A \subseteq B$;
(v) $(A \cap C) \subseteq (B \cap C) \implies A \subseteq B$;
(vi) $A \cup B = U \implies B = A^c$;
(vii) $A = C \setminus B \implies (A \cap B = \varnothing \wedge A \cup B = C)$.