Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Álgebra Superior I 2020-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudante: Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 4

1. Para cualesquiera conjuntos A y B, demuestre lo siguiente:
(i) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$; (ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

2. La siguiente afirmación *no* siempre es cierta. Encuentre un contraejemplo y diga qué condición se necesita pedir para que sí sea cierta, justificando su respuesta.
$\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3. Demuestre que dada la definición de par ordenado,
$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

4. Utilizando la definición de par ordenado, diga cuáles son los conjuntos siguientes:
(i) (a, a); (iii) $(\varnothing, a)$;
(ii) $(a, \varnothing)$; (iv) $(\varnothing, \{\varnothing\})$.

5. Sean A y B los siguientes conjuntos

$$A = \{(0, 0), (0, 1)\} \qquad B = \{a, b\}$$

Determine los conjuntos (i) $\mathcal{P}(A)$; (iii) B^2;
(ii) A^2; (iv) $\mathcal{P}(B^2)$.

6. Sean A, B y C subconjuntos cualesquiera de un conjunto universal U. Demuestre lo siguiente:

(i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
(ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
(iii) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
(iv) $A \times B = \varnothing \iff (A = \varnothing \vee B = \varnothing)$.

7. Considérense los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 5\} \qquad B = \{3, 4, 5\} \qquad C = \{1, 4, 6, 16\}$$
$$D = \{2, 3, 8, 10\} \qquad E = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

Defínanse las siguientes relaciones:

$$R \subseteq A \times B \text{ tal que } (x, y) \in R \iff x + y \leq 5;$$
$$S \subseteq A \times C \text{ tal que } (x, y) \in S \iff y = x^2;$$
$$T \subseteq C \times D \text{ tal que } (x, y) \in T \iff y = x/2;$$
$$P \subseteq E^2 \text{ tal que } (x, y) \in P \iff 3 \text{ divide a } x + y.$$

(i) Determine a las relaciones R, S, T y P por extensión;
(ii) Represente gráficamente a $A \times B$, R, $A \times C$, S, $C \times D$, T, E^2 y P.
(iii) Determine los dominios e imágenes de las cuatro relaciones;
(iv) Determine R^{-1} y P^{-1} por extensión;
(v) Clasifique R y S en términos de si son simétricas, antisimétricas y/o transitivas.
(vi) Clasifique T en términos de si es simétrica, antisimétrica y/o transitiva y clasifique P en términos de si es reflexiva, irreflexiva, antirreflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

8. En $\mathbb{R}^2$ se define $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + 2|y| = 1\}$. Diga cuál es el dominio e imagen de T y represente a T gráficamente.

9. Sea R definida sobre $\mathbb{Z}$ como $(a, b) \in R \iff a^2 + a = b^2 + b$. Determine si es reflexiva, irrefelxiva, antirreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y/o transitiva.

10. Sea S definida sobre $\mathbb{Z}^2$ (es decir, $S \subseteq \mathbb{Z}^4$) como $(a, b)\ S\ (a', b') \iff ab' = ba'$. Determine si es reflexiva, irreflexiva, antirreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y/o transitiva.

11. Sean R, S y T relaciones sobre un conjunto cualquiera A. Demuestre lo siguiente:

(i) $R^{-1} \subseteq im(R) \times dom(R)$;
(ii) Si R y S son reflexivas, entonces la relación $R \cup S$ es reflexiva;
(iii) R y S son reflexivas si y sólo si la relación $R \cap S$ es reflexiva;
(iv) $R \cup R^{-1}$ es una relación simétrica;
(v) R es simétrica si y sólo si R^{-1} es simétrica;
(vi) R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$;
(vii) R es transitiva si y sólo si R^{-1} es transitiva;
(vii) Si R y S son transitivas, entonces la relación $R \cap S$ es transitiva;
(ix) Si R y S son antisimétricas, entonces la relación $R \cap S$ es antisimétrica.

12. Sean R y S relaciones sobre un conjunto cualquiera A. Las siguientes afirmaciones *no* siempre son ciertas. Encuentre contraejemplos, justficándolos.

(i) Si $R \cup S$ es reflexiva, entonces R y S son reflexivas.
(ii) Si R y S son transitivas, entonces la relación $R \cup S$ es transitiva;
(iii) Si R y S son antisimétricas, entonces la relación $R \cup S$ es antisimétrica;
(iv) $R^{-1} = im(R) \times dom(R)$.