Álgebra Superior I 2020-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudante: Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 5

1. Demostrar que las siguientes relaciones son de equivalencia, determinar las clases de equivalencia, dar un conjunto de índices y el conjunto cociente.

(i) En $\mathbb{R}$, definimos la relación "$\sim$" como
$$x \sim y \iff x^2 - x = y^2 - y.$$

(ii) En $\mathbb{Z}$, definimos la relación "$\sim$" como
$$x \sim y \iff x + y \text{ es par.}$$

(iii) En $\mathbb{R}^2$, definimos la relación "$\sim$" como (entonces $\sim \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$)
$$(x, y) \sim (x', y') \iff y = y'.$$

(iv) En $\mathbb{N}^2$, definimos la relación "$\sim$" como (entonces $\sim \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$)
$$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = b + a'.$$

(v) En $(\mathbb{Z} - \{0\})^2$, definimos la relación "$\sim$" como (entonces $\sim \subseteq (\mathbb{Z} - \{0\})^2 \times (\mathbb{Z} - \{0\})^2$)
$$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = ba'.$$

(vi) Sea $A = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, sea $S = \{(x, y) \in A^2 : x^2 = y^2\}$.

(vii) Sea $B = \{1, 2, 3, 4\}$, sea $T = \{(x, y) \in B^2 : x = y \vee x + y = 3\}$.

2. Dé las particiones correspondientes a cada una de las relaciones de equivalencia de la pregunta 1.

3. Diga si las siguientes relaciones son de equivalencia y, para los incisos marcados con (*), también represéntelas gráficamente:

(i) la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{R}^+\}$, donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los reales positivos;

(ii) la relación $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| = 2\}$;

(iii) si A el conjunto de las rectas en el plano, la relación $T = \{(a, b) \in A^2 : a \cap b \neq \varnothing\}$;

(iv) si A el conjunto de las rectas en el plano, la relación
$V = \{(a, b) \in A^2 : a \text{ es perpendicular a } b\}$;

4. Demuestre que las siguientes son particiones de los conjuntos dados y diga cuáles son las relaciones de equivalencia correspondientes a cada partición:

(i) Dado el conjunto $\mathbb{N}$, sea $P = \{\{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par }\}, \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar }\}\}$;

(ii) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea $P = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$;

(iii) Dado el conjunto $\mathbb{R}$, sea $P = \{\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\}$;

5. Sea A un conjunto. Demuestre lo siguiente:

(i) Toda relación de equivalencia sobre un conjunto no vacío A induce una partición en A.

(ii) Toda partición de un conjunto no vacío A es inducida por una relación de equivalencia sobre A.

(iii) Sean $R \subseteq A^2$ y $R' \subseteq A^2$. Si R y R' son relaciones de equivalencia e inducen la misma partición sobre A, entonces $R = R'$.

(iv) Sean P y P' dos particiones de A. Si P y P' inducen la misma relación de equivalencia sobre A, entonces $P = P'$.

(v) Si R y R' dos relaciones de equivalencia sobre A, entonces $R \cap R'$ es una relación de equivalencia sobre A (¿es cierto que $R \cup R'$ es una relación de equivalencia sobre A?).

(vi) (Una relación $R \subseteq A^2$ se llama *circular* sii $\forall x, y, z \in A((xRy \wedge yRz) \rightarrow zRx)$.) Demuestre que una relación R sobre A es circular y reflexiva si y sólo si R es de equivalencia.