Álgebra Superior I 2020-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudante: Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 6

1. Diga si las siguientes relaciones son funciones, justificando su respuesta:

(i) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donde $(x, y) \in R \iff x = y^2$;
(ii) $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde $(x, y) \in S \iff x + y$ es par;
(iii) sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\varnothing, a, b\}$ (con $\varnothing \neq a \neq b \neq \varnothing$) y sea $T \subseteq A \times B$, donde $T = \{(1, \varnothing), (2, \varnothing), (3, a), (1, b)\}$;
(iv) sean A y B como en el inciso anterior y sea $U \subseteq A \times B$, donde $U = \{(1, a), (2, b), (3, \varnothing), (1, a)\}$;

(vi) sean A y B como en el inciso anterior y sea $R \subseteq A \times B$, donde $R = \{(2, b), (3, \varnothing)\}$;
(vii) sea A como en el inciso anterior y sea $S = \{(x, y) \in A : x + 1 = y\}$.

2. Grafique y clasifique las siguientes funciones (clasificar es decir si son inyectivas, sobres, biyectivas y justificar sus respuestas):

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = 3x$;
(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = x^2 + 1$;
(iii) $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, donde $f(x) = x^2 + 1$;
(iv) sean $A = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 3\}$ y $g : A \times C \to \mathbb{Z}$, donde $g(x, y) = 3x - y$;
(v) sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f : A \to B$, donde $f(X) = B \setminus X$;
(vi) sean A y C como en el inciso anterior y $h : A \times C \to \{0, 1, 3, 4, 6, 7\}$, donde $h(x, y) = 3x - y$.

3. Dé ejemplos de conjuntos X, Y, un subconjunto $A \subseteq X$ y una función $f : X \to Y$ de forma que cumplan lo siguiente (un ejemplo por cada inciso):

(i) $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$;
(ii) $f(X \setminus A) \cap (Y \setminus f(A)) = \varnothing$;
(iii) $Y \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$.

4. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(x) = x^2/2 + 1$ y $g(x) = [x]$ (es decir, $g(x)$ es el máximo entero no mayor que x).

(i) Defina $g \circ f$ y $f \circ g$;
(ii) determine $(g \circ f)(-2)$ y $(f \circ g)(-1/2)$.

5. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ y $h : C \to D$.

(i) Demuestre que si $g \circ f$ es sobre, entonces g es sobre.
(ii) Demuestre que si $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas, entonces f, g y h son biyectivas.
(iii) Supongamos que $A = D$ y que $h \circ g \circ f$ y $f \circ h \circ g$ son sobres, mientras que $g \circ f \circ h$ es inyectiva. Demuestre que entonces f, g y h son biyectivas.

6. Dé ejemplos de conjuntos A, B y C y de funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de forma que se cumpla lo siguiente (un ejemplo por inciso):

(i) g es sobre, pero $g \circ f$ no es sobre;
(ii) f es inyectiva, pero $g \circ f$ no es inyectiva;
(iii) f es inyectiva, g es sobre, pero $g \circ f$ no es ni inyectiva ni sobre;

(iv) f no es sobre, g no es inyectiva, pero $g \circ f$ es biyectiva.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 + 1$. Determine las imágenes de los siguientes subconjuntos del dominio bajo f:

(i) $[-1, 1)$; (iii) $(-\infty, 1/2]$; (v) $[1, 10]$;
(ii) $[0, 3]$; (iv) $[0, 3)$;

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 + 1$. Determine las preimágenes (o imágenes inversas) de los siguientes subconjuntos del codominio bajo f:

(i) $[-1, 1)$; (iii) $(-\infty, 1/2]$; (v) $[1, 10]$;
(ii) $[0, 3]$; (iv) $[0, 3)$;

9. Sean X y Y conjuntos cualesquiera y sea $f : X \to Y$.

(i) Demuestre que $f[\varnothing] = \varnothing$.
(ii) Si $A_1, A_2 \subseteq X$, demuestre que $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$.
(iii) Si $A_1, A_2 \subseteq X$, demuestre que $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$.
(iv) Dé un ejemplo en el que $A_1, A_2 \subseteq X$ y $f[A_1] \cap f[A_2] \not\subseteq f[A_1 \cap A_2]$.
(v) Demuestre que $\forall X_1, X_2 \subseteq A\big(f[X_1 \cap X_2] = f[X_1] \cap f[X_2]\big)$ si y sólo si f es inyectiva.

(vi) Demuestre que $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$.
(vii) Si $B_1, B_2 \subseteq Y$, demuestre que $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$.
(viii) Si $B_1, B_2 \subseteq Y$, demuestre que $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$. Note que entonces la imagen inversa se comporta mejor que la imagen directa.
(ix) Si $B \subseteq Y$, demuestre que $X \setminus f^{-1}[B] = f^{-1}[Y \setminus B]$.

10. Sean X y Y conjuntos, sea $f : X \to Y$. Demuestre lo siguiente:

(i) $\forall A \subseteq X\big(A \subseteq f^{-1}[f[A]]\big)$;
(ii) $\forall B \subseteq Y\big(f[f^{-1}[B]] \subseteq B\big)$;
(iii) $\forall A \subseteq X\big(f[X] \setminus f[A] \subseteq f[X \setminus A]\big)$.
(iv) $\forall A \subseteq X\big(A = f^{-1}[f[A]]\big)$ si y sólo si f es inyectiva;
(v) $\forall B \subseteq Y\big(f[f^{-1}[B]] = B\big)$ si y sólo si f es sobre;
(vi) $\forall A \subseteq X\big(Y \setminus f[A] = f[X \setminus A]\big)$ si y sólo si f es biyectiva.

11. (i) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = 1/(2-x)$. Demuestre que f es invertible, después defina f^{-1} y diga cuál es su dominio.
(ii) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = (3x + b)/(x - 3)$ con $b \neq 9$. Demuestre que f es invertible y muestre que $f^{-1} = f$.

12. Dé ejemplos (distintos de los vistos en clase) de conjuntos A y B y funciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tales que:

(i) $g \circ f = id_A$, pero $f \circ g \neq id_B$;
(ii) $g \circ f \neq id_A$, pero $f \circ g = id_B$.

Recuerde que $f : A \to B$ tiene inversa izquierda sii existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y tiene inversa derecha sii existe una función $g' : B \to A$ tal que $f \circ g' = id_B$.

13. Sea $f : A \to B$ con $A \neq \varnothing$. Demuestre lo siguiente:

(i) f es sobre si y sólo si f tiene inversa derecha.
(ii) f es inyectiva si y sólo si f tiene inversa izquierda.
(ii) Supóngase que f es inyectiva. Entonces para cualesquiera funciones $g_1, g_2 : C \to A$, si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, se tiene que $g_1 = g_2$.

(iii) Supóngase que f es sobre. Entonces para cualesquiera funciones $g_1, g_2 : B \to C$, si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, se tiene que $g_1 = g_2$.

(iv) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones tales que ambas tienen inversas derechas. Demuestre que entonces $g \circ f$ tiene inversa derecha.

14. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(n) = n^2$.

(i) Exhiba dos inversas izquierdas distintas de f.

(ii) Muestre que f no tiene inversa derecha.