1. El cjto vacío es único.

P.D. Si A es un cjto. t.q.

$\forall x (x \notin A)$, entonces $A = \emptyset$.

<u>Dems</u>: Sea A un cjto t.q.

$\forall x (x \notin A)$.

P.D. $A = \emptyset$.

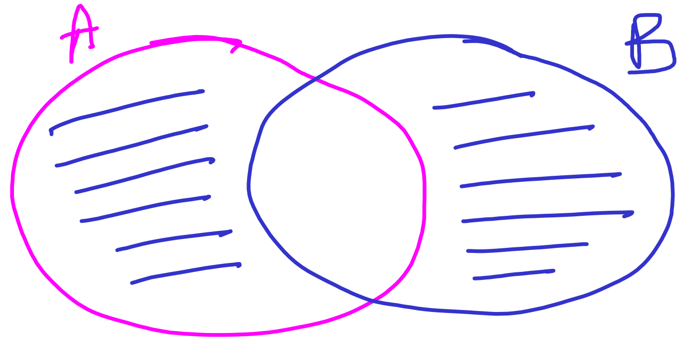
Por doble contención:

$\supseteq$ $\emptyset \subseteq A$ lo sabemos por resultado en clase.

$\subseteq$ P.D. $A \subseteq \emptyset$.

P.D. $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in \emptyset)$ . . .

Diferencia simétrica

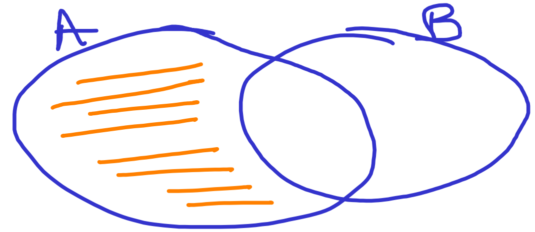


Si A y B son cjtos, la dif. simétrica entre A y B es el cjto.

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Ya probamos que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Sabemos que $A \setminus B = A \cap B^c$.

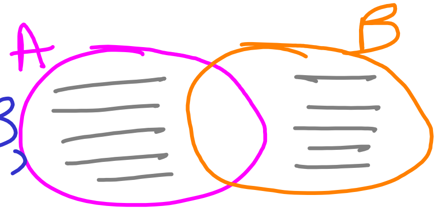


Ent, podemos observar:

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

con A y B subcjtos de un conjunto universal $\mathcal{U}$.

Propiedades de la diferencia simétrica.

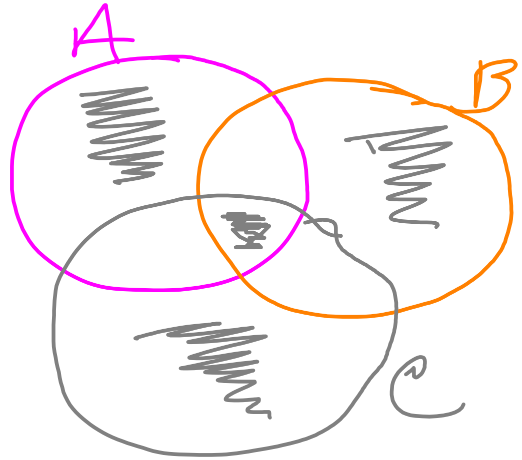


<u>Teorema:</u> Para cualesquiera cjtos A y B, se tienen las sigs. props:

(i) <u>Conmutatividad</u>: $A \triangle B = B \triangle A$.

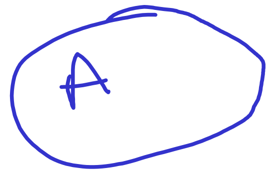
(ii) <u>Asociatividad</u>: Si A, B y C son cjtos. cualesquiera, entonces:

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$



(iii) <u>Neutro</u>: Si A es un cjto. cualquiera, entonces.

$$A \triangle \emptyset = A.$$



(iv) <u>Inversos</u>: Si A es un cjto, ent

$$A \triangle A = \emptyset.$$

Dems: (i) Sean A y B cjtos. cualesquiera.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$ por def. de $\triangle$.

$$= (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$$ por conmut. de unión.

$$= B \triangle A.$$ por def. de $\triangle$.

(ii) Sean A, B y C cjtos. cualesquiera. Entonces.

$$A \triangle (B \triangle C) = \left(A \cap (B \triangle C)^c\right) \cup \left(A^c \cap (B \triangle C)\right).$$

$$= \left(A \cap \left((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)\right)^c\right) \cup$$

$$\boxed{\left(A^c \cap \left((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)\right)\right)}.$$

$$= \left(A \cap \left((B \cap C^c)^c \cap (B^c \cap C)^c\right)\right) \cup$$

$$\boxed{\left(A^c \cap \left((B^c \cup C) \cap (B \cup C^c)\right)\right)}.$$

El error está en que estas dos cosas no son iguales.

$$= \left(A \cap \left((B^c \cup C) \cap (B \cup C^c)\right)\right) \cup$$

$$\left(A^c \cap \left(\underline{(B^c \cup C) \cap (B \cup C^c)}\right)\right) .$$

$$= \left(A \cap \left(((B^c \cup C) \cap B) \cup ((B^c \cup C) \cap C^c)\right)\right) \cup$$

$$\left(A^c \cap \left(\underline{((B^c \cup C) \cap B) \cup ((B^c \cup C) \cap C^c)}\right)\right)$$

$$= \left(A \cap \left((\cancelto{\emptyset}{B^c \cap B}) \cup (C \cap B)\right) \cup \left((B^c \cap C^c) \cup (\cancelto{\emptyset}{C \cap C^c})\right)\right)$$

$$\cup \left(A^c \cap \left(((\cancelto{\emptyset}{B^c \cap B}) \cup (C \cap B)) \cup ((B^c \cap C^c) \cup (\cancelto{\emptyset}{C \cap C^c}))\right)\right)$$

$$= \left((A \cap (C \cap B)) \cup (A \cap (B^c \cap C^c))\right) \cup$$

$$\left((A^c \cap (C \cap B)) \cup (A^c \cap (B^c \cap C^c))\right)$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup$$

$$(A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c) = A \triangle (B \triangle C)$$

Resta ver que:

$$(A \triangle B) \triangle C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c)$$

$$\cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c).$$

Sabemos por (i) que:

$$(A \triangle B) \triangle C = C \triangle (A \triangle B)$$

$$= (C \cap A \cap B) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup$$

$$(C^c \cap A \cap B) \cup (C^c \cap A^c \cap B^c)$$

?

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup$$

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c).$$

Asociatividad de la diferencia simétrica

En estas notas demostraremos (¡correctamente!) que para cualesquiera conjuntos A, B y C, se cumple que

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

Utilizaremos la observación de que, si A y B son subconjuntos de un conjunto universal U, entonces

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B). \tag{1}$$

Demostración. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Entonces, utilizando (1), las leyes de De Morgan, la conmutatividad y asociatividad de uniones e intersecciones, la distributividad de la unión sobre la intersección y de la intersección sobre la unión, se tiene que

$$\begin{aligned}
&A \triangle (B \triangle C) && (2)\\
&= ((A \cap (B \triangle C)^c) \cup (A^c \cap (B \triangle C)))\\
&= (A \cap ((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C))^c) \cup (A^c \cap ((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)))\\
&= (A \cap ((B \cap C^c)^c \cap (B^c \cap C)^c)) \cup ((A^c \cap (B \cap C^c)) \cup (A^c \cap (B^c \cap C)))\\
&= (A \cap ((B^c \cup C) \cap (B \cup C^c))) \cup ((A^c \cap (B \cap C^c)) \cup (A^c \cap (B^c \cap C)))\\
&= (A \cap (((B^c \cup C) \cap B) \cup ((B^c \cup C) \cap C^c))) \cup ((A^c \cap (B \cap C^c)) \cup (A^c \cap (B^c \cap C)))\\
&= (A \cap (((B^c \cap B) \cup (C \cap B)) \cup ((B^c \cap C^c) \cup (C \cap C^c)))) \cup ((A^c \cap (B \cap C^c)) \cup (A^c \cap (B^c \cap C)))\\
&= (A \cap ((\varnothing \cup (C \cap B)) \cup ((B^c \cap C^c) \cup \varnothing))) \cup ((A^c \cap (B \cap C^c)) \cup (A^c \cap (B^c \cap C)))\\
&= (A \cap ((C \cap B) \cup (B^c \cap C^c))) \cup ((A^c \cap (B \cap C^c)) \cup (A^c \cap (B^c \cap C)))\\
&= (A \cap (C \cap B)) \cup (A \cap (B^c \cap C^c)) \cup (A^c \cap (B \cap C^c)) \cup (A^c \cap (B^c \cap C))\\
&= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) && (3)
\end{aligned}$$

Por otro lado, por conmutatividad de la diferencia simétrica, tenemos que

$$(A \triangle B) \triangle C = C \triangle (A \triangle B).$$

Entonces, aplicando lo obtenido en (3) al conjunto $C \triangle (A \triangle B)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
C \triangle (A \triangle B) &= (C \cap A \cap B) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (C^c \cap A \cap B^c) \cup (C^c \cap A^c \cap B)\\
&\quad (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)\,.
\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad arriba estamos utilizando la conmutatividad de la unión y de la intersección.
Esta desigualdad, junto con (3), implican que

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

$\square$