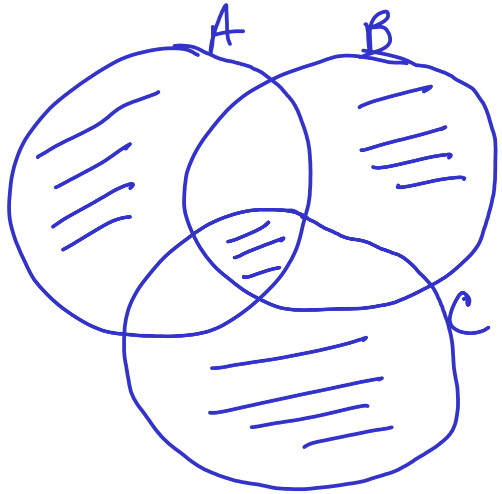
**Teorema:** (ii) Si $A, B$ y $C$ son conjuntos cualesquiera, entonces

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$




(iii) Existencia del neutro para $\triangle$:

Para todo cjto $A$, $A \triangle \phi = A$.

(iv) Para todo conjunto $A$,

$$A \triangle A = \phi.$$

(El inverso de $A$ con la dif sim., es $A$).

**Dem:** (iii) **Dem:** Si $A$ es un cjto cualquiera,

$$A \triangle \phi := (A \setminus \phi) \cup (\phi \setminus A) = A \cup \phi = A$$

el neutro de la dif es $\phi$.
y porque $\phi \setminus A = \phi$.

el $\phi$ es neutro p. la unión.

(iv) Sea $A$ un conjunto cualquiera. Entonces

$A \Delta A := (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset$ pues $A$ es el inverso de $A$ en la diferencia $\setminus$.

$\therefore$ $A \Delta A = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \rightarrow$ por idempotencia de la unión.

$\blacksquare$

---

Gracias a la asociatividad de la unión y de la intersección, podemos escribir

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ \text{y} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 . \end{array}\right\} \text{sin riesgo de ambigüedades.}$$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ y

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ son expresiones a las que les damos sentido sin riesgo de ambigüedad.

## Intersecciones y uniones generalizadas.

Si $A_1 =$ Números naturales que son pares.

$A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

$A_3 =$ Primos.

$A_4 = \{2, 4, 6, 7, 9\}$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{2\}$.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{x \in \mathbb{N} : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge x \in A_3 \wedge x \in A_4\}.$$

$$= \{x \in \mathbb{N} : \forall i \in \{1,2,3,4\} (x \in A_i)\}.$$

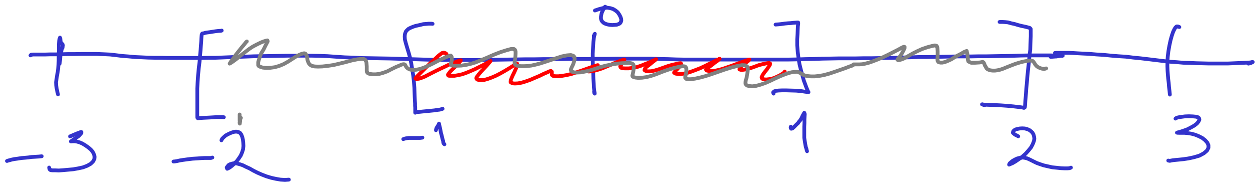
Si definimos al conjunto $I = \{1,2,3,4\}$, ent. el cjto. anterior se escribe como

$$\{x \in \mathbb{N} : \forall i \in I (x \in A_i)\}.$$

Ejemplo: Sea $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ y para cada $i \in \mathbb{N}^+$, definamos al conjunto $A_i = [-i, i]$.

Ent., el cjto $\{x \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N}^+ (x \in A_i)\}$ se llama la intersección de los conjuntos $A_i$ tales que $i \in \mathbb{N}^+$.

$$A_1 = [-1,1] \subseteq A_2 = [-2,2] \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1}$$




Denotamos a este conjunto por

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}^+} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^+} [-i, i] = [-1,1] = A_1.$$

**Definición:** Si $I$ es un conjunto (de índices) y para cada $i \in I$ tenemos un conjunto $A_i$, y definimos la intersección (generalizada) de los $A_i$'s como el conjunto

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I \, (x \in A_i)\}.$$

También se puede denotar como

$$\bigcap \{A_i : i \in I\}$$

Ej: Sea $I = \mathbb{N}$ y para cada $i \in I$,

def. $A_i := [-i, i] \cap \text{Primos}$.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$$

$$A_0 = [0,0] \cap \text{Primos} = \{0\} \cap \text{Primos} = \emptyset$$

$$A_1 = [-1,1] \cap \text{Primos} = \emptyset$$

$$A_2 = [-2,2] \cap \text{Primos} = \{2\}$$

$\vdots$