Proposición: Sea I un conjunto de índices y para cada $i \in I$, A_i es un conjunto, entonces:

$$\forall j \in I \quad A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

Dem: Sea $j \in I$ arbitrario.

P.D. $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Sea x un elemento arbitrario y supongamos que $x \in A_j$.

P.D. $x \in \bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I \, (x \in A_i)\}$.

Como $j \in I$ es t.q. $x \in A_j$, entonces, por def. de unión gral., $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. $\blacksquare$

Distributividad: (i) $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

(ii) $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$.

En las intersecciones y uniones generalizadas esto se generaliza como sigue:

Proposición: Leyes distributivas generalizadas:

Sea I un conjunto de índices t.q. para cada $i\in I$, A_i es un conjunto.

Supongamos que B es también un cjto. Entonces:

(1) $$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B).$$

Aquí, $\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$ representa al conjunto $\bigcup_{i\in I} B_i$, donde

$B_i := A_i \cap B$.

(2) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$, donde

$\bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$ representa a $\bigcap_{i\in I} C_i$, con

$C_i = A_i \cup B$ para cada $i \in I$.

Dem: (1) Bajo las hips. de la proposición, queremos demostrar que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$.

Por doble contención:

$\subseteq$) Sea $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B$.

Entonces, $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in B$.

Por lo tanto, $(\exists j \in I\,(x \in A_j)) \wedge x \in B$.

Entonces, existe $j \in I$ t.q. $(x \in A_j \wedge x \in B)$.

Esto es, $\exists j \in I\,(x \in A_j \cap B)$

Por tanto, $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$.

$$\therefore \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B).$$

$\boxed{\supseteq}$ Sea $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$.

Esto significa que $\exists j \in I\,(x \in (A_j \cap B))$.

Entonces $\exists j \in I\,(x \in A_j \wedge x \in B)$.

Entonces: $\left(\exists j \in I\,(x \in A_j)\right) \wedge x \in B$,

es decir, $\left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right) \wedge x \in B$.

Esto implica que $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B$.

Dadas ambas contenciones, concluimos que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B).$$

$\blacksquare$

(2) Ejercicio.

Ejemplo: Para $I = \mathbb{N}$ y para cada $i \in I$,

$$A_i := \{0, 1, \dots, i\}.$$

$A_0 = \{0\}$

$A_1 = \{0, 1\}$

$A_2 = \{0, 1, 2\}$

$\vdots$

Sea B el cjto. de los números primos.

¿Quién es

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)?$$

① J.A. afirma que: $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = B$.

Por distributividad:

$$\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B$$

$$= \mathbb{N}\cap B$$

$$= B.$$

$\blacksquare$

Proposición: Sea I un cjto. de índices t.q. para cada $i \in I$, A_i es subconjunto de un conjunto universal $\mathcal{U}$.

Entonces se cumplen las sigs. leyes de De Morgan:

(i) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} (A_i^c)$.

(ii) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} (A_i^c)$.

Dem: (i) $[\subseteq]$ Sea $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c$.

Entonces: $x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \underline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

Esto significa: $x \in \mathcal{U} \wedge \underline{\neg\left(\exists j \in I \, (x \in A_j)\right)}$.

Entonces: $x \in \mathcal{U} \wedge \left(\forall j \in I \, (x \notin A_j)\right)$. y esto

implica que $\forall j \in I \left(x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A_j \right)$.

Por tanto: $\forall j \in I \, (x \in A_j^c)$.

Entonces: $x \in \bigcap_{j \in I} (A_j^c)$.

$\supseteq$) Sea $x \in \bigcap_{i \in I} (A_i^c)$

P.D $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c$.

La hipótesis significa:

$$\forall i \in I \left(x \in A_i^c \right).$$

Esto a su vez equivale a que:

$$\forall i \in I \left(x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A_i \right).$$

Entonces: $x \in \mathcal{U} \wedge \left(\forall i \in I \left(x \notin A_i \right) \right).$

Esto implica que:

$$(x \in \mathcal{U}) \wedge \neg \left(\exists i \in I \left(x \in A_i \right) \right).$$

y esto es:

$$x \in \mathcal{U} \wedge \left(\neg \left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \right) \right).$$

$\therefore \; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \bigcup_{i \in I} A_i.$

Concluimos que

$$x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c.$$

$\blacksquare$