4 Sea $\mathcal{U}$ cjto universal y sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$.

(i) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$.

$\Leftarrow]$ Sup. que $B^c \subseteq A^c$.

P.D. $A \subseteq B$.

P.D: $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Por hipótesis tenemos que

$\forall x (x \in B^c \Rightarrow x \in A^c)$, esto es:

$$\forall x ((x \in \mathcal{U} \wedge x \notin B) \Rightarrow (x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A)).$$

Tomando la contrapuesta, esto es:

$$\forall x \left((x \notin U \vee x \in A) \Rightarrow (x \notin U \vee x \in B) \right) . \ (\ast)$$

Sea x t.q. $x \in A$. Como $A \subseteq U$, ent. $x \in U$.

Ent, por $(\ast)$, $x \notin U \vee \underbrace{x \in B}$.

⋮

9 (IV).

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$.

P. dem.

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Procedamos a demostrar por doble contención.

$A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B) \wedge A \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B$.

1=

$A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B)$ esto significa que.

$\forall x \, ((x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin A \cap B))$

Voy a demostrar la contrapuesta.

Por contrapuesta esto significa lo mismo que:

$\forall x \, (\neg (x \in A \wedge x \notin A \cap B) \Rightarrow \neg (x \in A \wedge x \notin B))$

$\equiv \forall x \, ((x \notin A \vee x \in A \cap B) \Rightarrow (x \notin A \vee x \in B))$

Sea x arbitraria tal que. $x \notin A \vee x \in A \cap B \Rightarrow$

$x \notin A \vee (x \in A \wedge x \in B)$ por distribución de la disyunción esto es lo mismo que.

$(P \wedge Q) \Rightarrow Q$.

$\rightarrow (x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin A \vee x \in B)$

Ent. $x \notin A \vee x \in B$

1. $\boxed{\text{P.D: Si } A \text{ es un cjto. t.q. } \forall x (x \notin A), \text{ entonces } A = \emptyset}$

Sup. que $\boxed{\forall x (x \notin A)}$

P.D. $A = \emptyset$

$\supseteq]$ $\emptyset \subseteq A$.

$\subseteq]$ P.D: $A \subseteq \emptyset$.

P.D. $\forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in \emptyset)$.

Sea x arbitrario.

9 (ix) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

P.D. $\forall x \, (x \in (A \setminus B) \setminus C \implies x \in A \setminus (B \setminus C))$.

Sea x arb. t.q. $x \in (A \setminus B) \setminus C$.

Ent $x \in A \setminus B \wedge x \notin C$.

Ent $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$.

$x \in E \setminus F$

$\iff$

$x \in E$ y

$x \notin F$.

P.D: $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

P.D: $x \in A \wedge x \notin (B \setminus C)$.

P.D. $x \in A \wedge \neg (x \in B \setminus C)$.

P.D. $x \in A \wedge \neg (x \in B \wedge x \notin C)$.

P.D. $x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$. ¿?

Continuación pregunta 9 (IV)

$\supseteq$ P. dem.

$A \setminus A \cap B \subseteq A \setminus B$.

Sup. $A \setminus A \cap B \subseteq A \setminus B \equiv \forall x \left((x \in A \wedge x \notin A \cap B) \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \right)$

Sea x arbitraria tal que. $x \in A \wedge x \notin A \cap B \equiv$.

Como $x \in A$ y $A \subseteq \mathcal{U}$, ent $x \in \mathcal{U}$

$x \in A \wedge x \in (A \cap B)^c \equiv x \in A \wedge x \in A^c \cap B^c$

$\equiv x \in A \wedge (x \in A^c \vee x \in B^c) \equiv$ Por distribución del "y"

$(x \in A \wedge x \in A^c) \vee (x \in A \wedge x \in B^c) \equiv$

$(x \in A \wedge x \in A^c) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$.