Uniones e intersecciones generalizadas

Prop. Si I es un cjto. de índices y p.c. $i \in I$ A_i es un subconjunto del conjunto universal $\mathcal{U}$, entonces:

(i) $$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I}\left(A_i^c\right)$$

(ii) $$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I}\left(A_i^c\right).$$

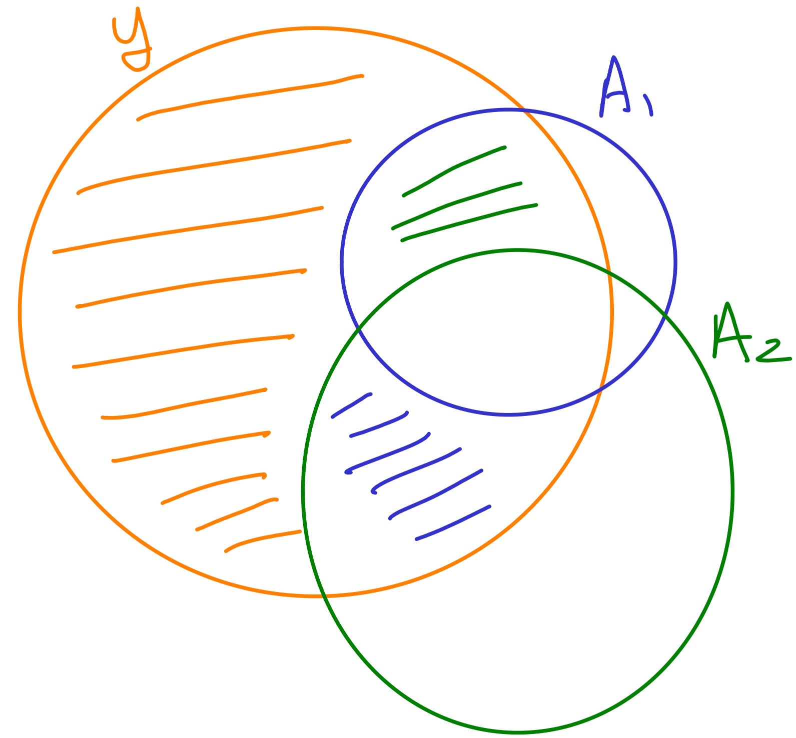
Proposición: Sea I un cjto de índices y p.c. $i\in I$, A_i es un conjunto. Si Y es un conjunto cualquiera, entonces

(i) $$Y \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}\left(Y\setminus A_i\right).$$

(ii) $$Y \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}\left(Y\setminus A_i\right)$$

Dem:

(i) Sean I, A_i y $\mathcal{Y}$ como en las hipótesis. Entonces



$$\mathcal{Y} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) =$$

$$\mathcal{Y} \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c \underset{\text{por resultado anterior}}{=}$$

$$\mathcal{Y} \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i^c \right) \underset{\text{asoc. de int. gralizada.}}{=}$$

$$\bigcap_{i \in I} \left(\mathcal{Y} \cap A_i^c \right) = \bigcap_{i \in I} \left(\mathcal{Y} \setminus A_i \right)$$

(ii) Sean I, A_i con $i \in I$ y $\mathcal{Y}$ como en las hipótesis. Sup. que $\mathcal{U}$ es un cjto universal t.q. $A_i \subseteq \mathcal{U}$ $\forall i \in I$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}$.

Entonces:

$$\mathcal{Y} \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \underset{\text{prop de dif.}}{=} \mathcal{Y} \cap \left(\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c \right)$$

$$\underset{\text{De Morgan gral.}}{=} \mathcal{Y} \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i^c \right)$$

$$\underset{\text{Dist. de } \cup \text{ gral.}}{=} \bigcup_{i \in I} \left(\mathcal{Y} \cap A_i^c \right)$$

$$\underset{\text{Prop de dif.}}{=} \bigcup_{i \in I} \left(\mathcal{Y} \setminus A_i \right)$$

$\blacksquare$

Ahora procedamos a demostrar

$A \setminus A \cap B = (A \cup B) \setminus B$

Demostraré por doble contención.

$A \setminus A \cap B \subseteq (A \cup B) \setminus B \quad \wedge \quad (A \cup B) \setminus B$

Demostremos. $A \setminus A \cap B \subseteq (A \cup B) \setminus B$.

esto es equivalente a que:

$\forall x \, ((x \in A \wedge x \notin A \cap B) \Rightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin B))$

Sea x arbitrario tal que $x \in A \wedge x \notin A \cap B$ esto es lo mismo que $\underline{x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)}$ por distribución de la conjunción obtenemos que $(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$.

Hagamos una pausa y veamos esta observación: nosotros queremos llegar a $x \in A \cup B \wedge x \notin B$ pero eso es equivalente a $\underline{(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B}$ por la distribución de la conjunción esto equivale a $\underline{(x \in B \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)}$.

Usando lo que hemos desarrollado nuestro predicado queda de la forma

$$\forall x \, (\underbrace{\underbrace{(x \in A \wedge x \notin A)}_{F} \vee \underbrace{(x \in A \wedge x \notin B)}_{V}} \Rightarrow [\underbrace{(x \in B \wedge x \notin B)}_{F} \vee \underbrace{(x \in A \wedge x \notin B)}_{V}])$$

P.D: $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\setminus C)$.

$\forall x\, (x \in (A\setminus B)\setminus C \Rightarrow x \in A\setminus(B\setminus C))$.

$\forall x.\ ((x\in (A\setminus B) \land x\notin C) \Rightarrow (x\in A \land (x\notin B\setminus C)))$

$\forall x (((x\in A \land x\notin B) \land x\notin C) \Rightarrow (x\in A \land \underline{(x\notin B \lor x\in C)}))$

$\forall x. (\underbrace{(x\in A \land x\notin B)}_{V} \land x\notin C) \Rightarrow \underbrace{(x\in A \land x\notin B)}_{V} \lor \underline{(x\in A \land x\in C)}$

$x\in A$

$\cancel{(x\in A \land x\notin A) \Rightarrow (x\in B \land}$