Conjunto potencia.

Sea A un conjunto, si $B = \{x \in A : P(x)\}$, ent $B \subseteq A$ y B es un conjunto.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2\}$

¿Quiénes son todos los subconjuntos de A?

$\phi \subseteq A$; $\{1\} \subseteq A$; $\{2\} \subseteq A$; $A \subseteq A$

✓ ✓ ✓ ✓

Podemos considerar al conjunto

$$\{\phi, \{1\}, \{2\}, A\}$$

Obs: $\{\phi\} \not\subseteq A$ pues $\phi \in \{\phi\}$ y $\phi \notin A$

Definición: Dado un conjunto A arbitrario, definimos el conjunto potencia de A, denotado por $\wp(A)$ como el conjunto

$$\wp(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Ejemplo: ① $A = \{\phi, 1, 4\}$.

$$\wp(A) = \{\phi, \{\phi\}, \{1\}, \{4\}, \{\phi, 1\}, \{\phi, 4\}, \{1, 4\}, A\}$$

$\phi \subseteq A$, ent $\phi \in \mathcal{P}(A)$.

Como $\phi \in A$, ent $\{\phi\} \subseteq A$, ent $\{\phi\} \in \mathcal{P}(A)$.

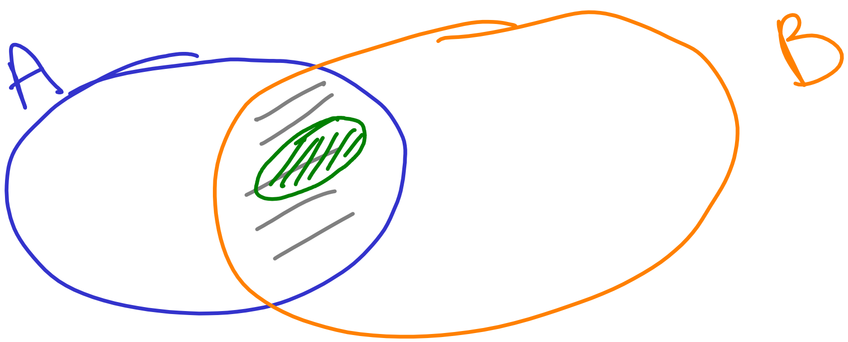
(2) Si $A = \phi$.

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi\}$$

<u>Obs:</u> Si A es un cjto cualquiera, como $\phi \subseteq A$, entonces $\phi \in \mathcal{P}(A)$. En particular esto implica que $\boxed{\mathcal{P}(A) \neq \phi}$.

③ Sea $A=\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$.

$$\wp(A)=\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\{\phi\}\}\}, \{\phi, \{\{\phi\}\}\}, A\}$$



$\wp(A\cap B)=?$

<u>Proposición:</u> Si A y B son conjuntos cualesquiera entonces

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

<u>Lema:</u> Sean A y B son dos conjuntos arbitrarios, entonces $X \subseteq A \cap B$ si y sólo si $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$.

<u>Dem:</u> $\Rightarrow$] Sup que $X \subseteq A \cap B$. Entonces:

$\forall x\,(x \in X \Rightarrow x \in A \cap B)$, ent

$\forall x\,(x \in X \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B))$.

P.D. $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$.

(1) Veamos que $X \subseteq A$.

P.D $\forall x (x \in X \Rightarrow x \in A)$.

Sea x arbitrario t.q. $x \in X$

Por hipótesis ent $x \in A \wedge x \in B$

Por tanto $x \in A$.

$\therefore X \subseteq A$.

(2) La prueba de que $X \subseteq B$ es análoga.

$\therefore X \subseteq A$ y $X \subseteq B$.

$\Leftarrow$] Sup que $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$.

P.D. $X \subseteq A \cap B$.

P.D. $\forall x (x \in X \Rightarrow x \in A \cap B)$.

Sea x arbitrario t.q. $x \in X$.

Como $X \subseteq A$, ent. $x \in A$.

Luego, como $X \subseteq B$, ent $x \in B$.

Lo anterior significa que $x \in A \wedge x \in B$

Por tanto, $x \in A \cap B$.

$\therefore \; X \subseteq A \cap B \iff X \subseteq A$ y $X \subseteq B$.

Dems. de la Proposición.

Sean A y B cjtos cualesquiera. Entonces

$$X \in \mathcal{P}(A \cap B) \iff X \subseteq A \cap B. \quad (\text{def. de } \mathcal{P})$$

$$\iff X \subseteq A \text{ y } X \subseteq B \quad (\text{por Lema})$$

$$\iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ y } X \in \mathcal{P}(B).$$

$$\iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

$$\therefore \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \quad \blacksquare$$