Si $A=\{a,b\}$ y $B=\{c,d\}$, entonces,

$(a,c)$, $(a,d)$, $(b,c)$ y $(b,d)$ son todos los pares ordenados tales que su primer coordenada está en $A$ y la segunda en $B$.

<u>Definición:</u> Si $A$ y $B$ son conjuntos, definimos al <u>producto cartesiano</u> de $A$ con $B$, denotado por $A \times B$, como el <u>conjunto</u> de pares ordenados

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

<u>Notación:</u> ① $A \times B$ también se lee como "$A$ cruz $B$".

② Si $A=B$, escribimos $A^2$ para denotar al cjto.

$A \times A$ y esto se lee "A cuadrado".

<u>Ejemplo:</u> $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6\}$.

$$A \times B = \{(2,5), (2,6), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)\}.$$

$$B \times A = \{(5,2), (5,3), (5,4), (6,2), (6,3), (6,4)\}.$$

Nótese que: $A \times B \neq B \times A$ pues $(2,5) \in A \times B$ y $(2,5) \notin B \times A$.

Más aún, en este ejemplo, $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

Ej: $B = \{5, 6\}$.

$B^2 = \{(5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$.

(Recordatorio $(5,6) = \{\{5\}, \{5,6\}\}$.

$(5,5) = \{\{5\}\}$.)

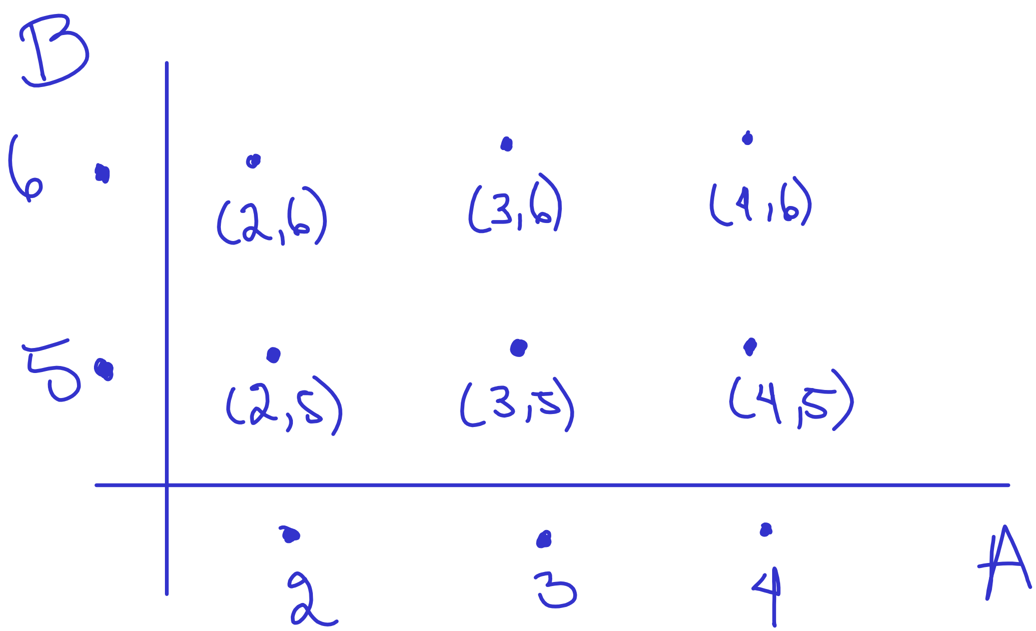
Ej: Si $A = \{2\}$. y si $B = \{3,4\}$.

$A^2 = A \times A = \{(2,2)\}$.

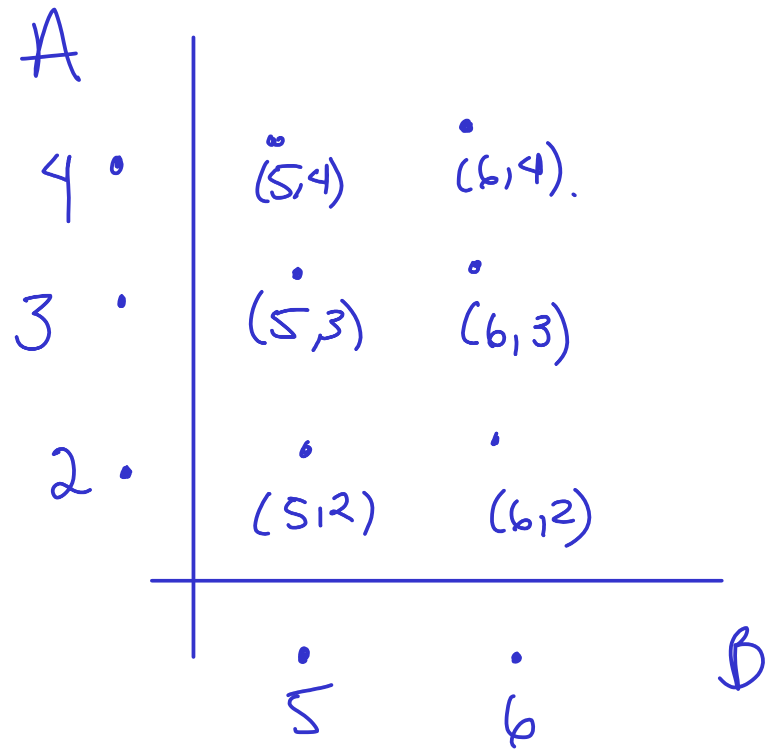
$A \times B = \{(2,3), (2,4)\}$.

Es posible hacer una representación gráfica de un producto cartesiano:

Si $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6\}$, ent. podemos representar a $A \times B$ gráficamente:



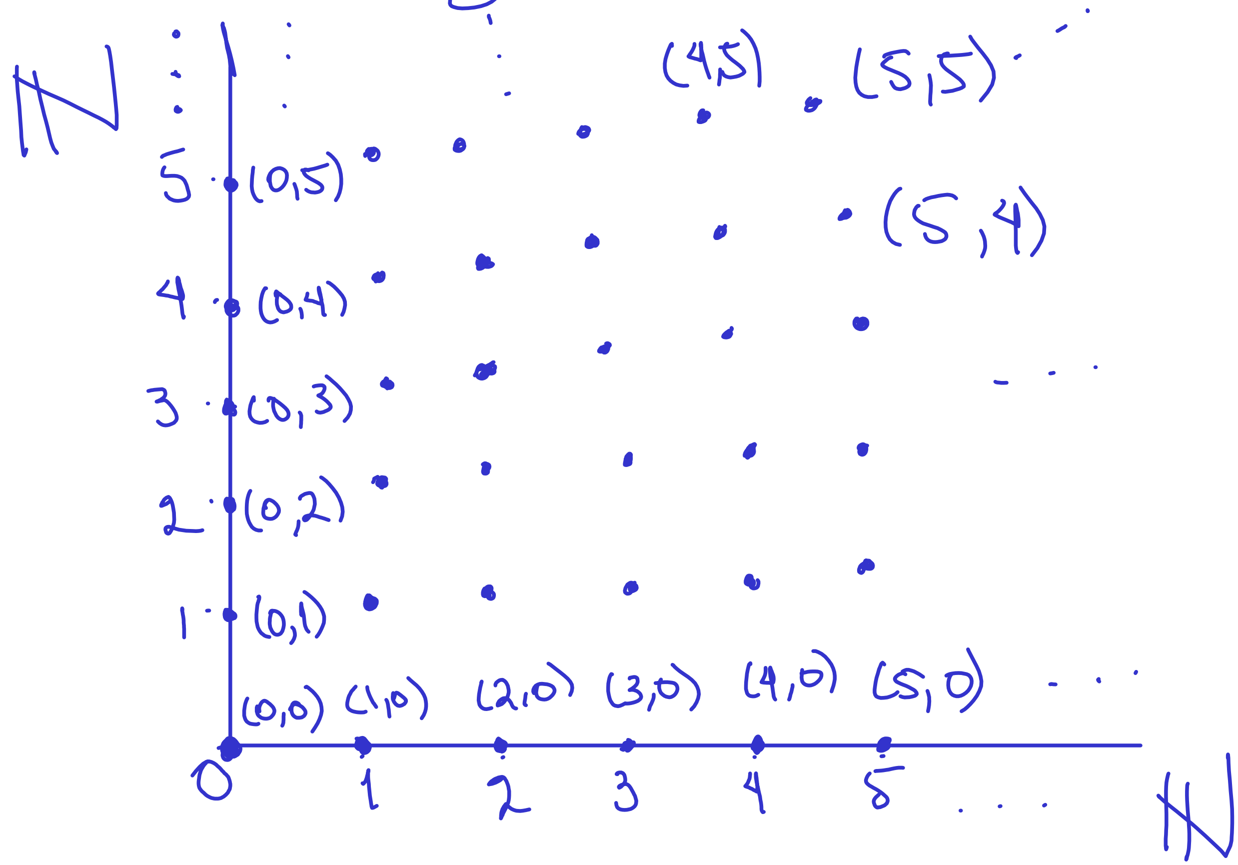

$A \times B$




$B \times A$.

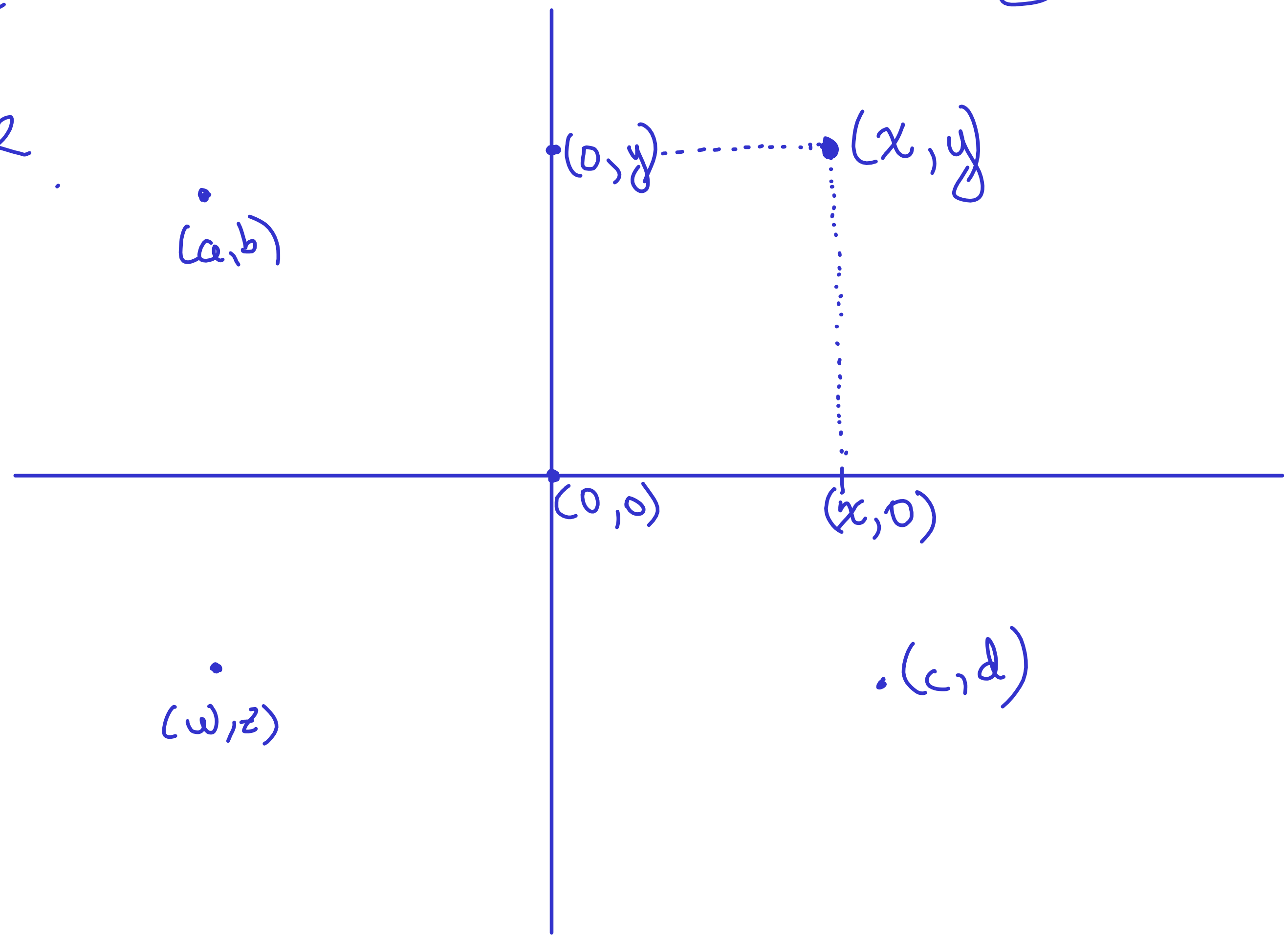
Ejemplo:

$$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m,n) : m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$



$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

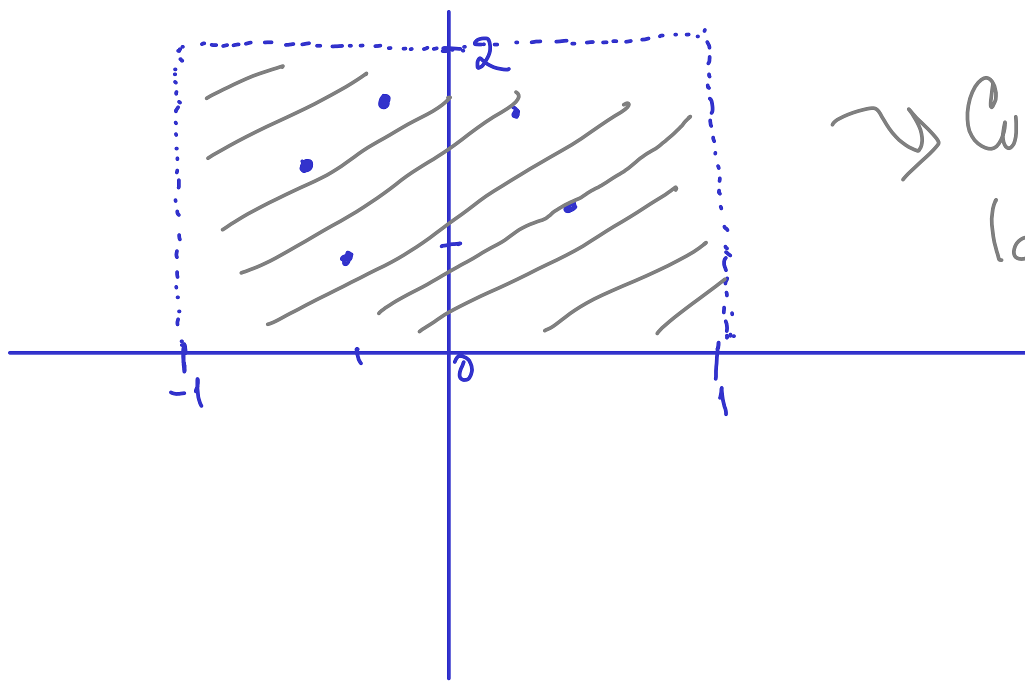
$\mathbb{R}^2.$



Ej: Si $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$.

y $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\} = [0, 2]$.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in [-1, 1] \wedge y \in [0, 2]\}$$




Cuadrado de lado 2.

¿Qué ocurre si $A=\emptyset$?

¿Quién es $A\times B$?

$$A\times B=\{(a,b): a\in A \wedge b\in B\}=\emptyset.$$

<u>Proposición:</u> Si $A$ y $B$ son conjuntos cualesquiera, entonces $A\times B=\emptyset \iff (A=\emptyset \vee B=\emptyset)$.

<u>Dem:</u> Sean $A$ y $B$ cjtos.

P.D: $A\times B\neq\emptyset \iff \neg(A=\emptyset \vee B=\emptyset)$.

P.D. $A\times B\neq\emptyset \iff A\neq\emptyset \wedge B\neq\emptyset$

$$A \times B \neq \emptyset \iff \exists (a,b) \in A \times B.$$

$$\iff \exists (a,b) \text{ t.q } a \in A \wedge b \in B.$$

$$\iff \exists a \in A \wedge \exists b \in B.$$

$$\iff A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$$

$\blacksquare$