Def: Si A y B son conjuntos,

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Obs: $A \times A := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in A\} =: A^2$

Ej. Si $A = \{3, 4\}$.

$$A \times A = \{(3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}.$$

Teorema: Sean A, B y C conjuntos cualesquiera.

Entonces:

(i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(iii) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

<u>Dem:</u> (iii) P.D: $\forall (x,y)\big((x,y) \in (A \setminus B) \times C \Leftrightarrow$

$(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)\big)$.

Sea (x,y) un par ordenado. Ent, por def:

$(x,y) \in (A \setminus B) \times C \Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge y \in C$.

$\underset{\text{def de dif}}{\Longleftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$.

$\Rightarrow]$ Sup que $(x,y) \in (A \setminus B) \times C$.

PD $(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$.

P.D. $(x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \notin B \times C$.

Como $(x,y) \in (A \setminus B) \times C$, ent.

$(x \in A \setminus B) \wedge y \in C$.

Por tanto $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$. ...... (*)

Esto implica que $x \in A \wedge y \in C$. Por tanto, $(x,y) \in A \times C$. (1)

Falta ver que $(x,y) \notin B \times C$, esto es:

PD: $\neg(x \in B \wedge y \in C)$.

PD $x \notin B \vee y \notin C$.

Como sabemos que, por (*) $x \notin B$, ent.

$x \notin B \vee y \notin C$ (pues $P \Rightarrow P \vee Q$).

$\therefore \neg(x \in B \wedge y \in C)$, es decir,

$x \notin (B \times C)$. (2)

Se sigue de (1) y (2) que

$(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$. ✓.

$\Leftarrow$] Sup. que $(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$

P.D: $(x,y) \in (A \setminus B) \times C$.

P.D. $x \in (A \setminus B) \wedge y \in C$.

P.D. $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$.

Por hipótesis tenemos que $(x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \notin B \times C$.

Por tanto, $(x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in C)$, esto es:

$$(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C).$$

Por distributividad, esto implica que:

$$((x \in A \wedge y \in C) \wedge x \notin B) \vee ((x \in A \wedge y \in C) \wedge y \notin C).$$

Como $(x \in A \wedge y \in C) \wedge y \notin C$ es falso, entonces:

$(x \in A \wedge y \in C) \wedge x \notin B$ es verdadero.

$\therefore$ $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$ por conmut. y dist.

$\therefore$ $x \in A \setminus B \wedge y \in C$, es decir $(x,y) \in (A \setminus B) \times C$ $\blacksquare$

Relaciones

A	B
Alan	Naranja
Andre	Uva
Adrián	Pera
Joel	Mango
José A	Plátano
José M.	Manzana
Kevin	Guanábana
Manuel	Guayaba
Oscar	Melón
Ruth	Sandía
Ulises	Kiwi
Víctor	
Judith	

Definición: Sean A y B dos cjtos y sea $R \subseteq A \times B$. Decimos entonces que R es una relación.

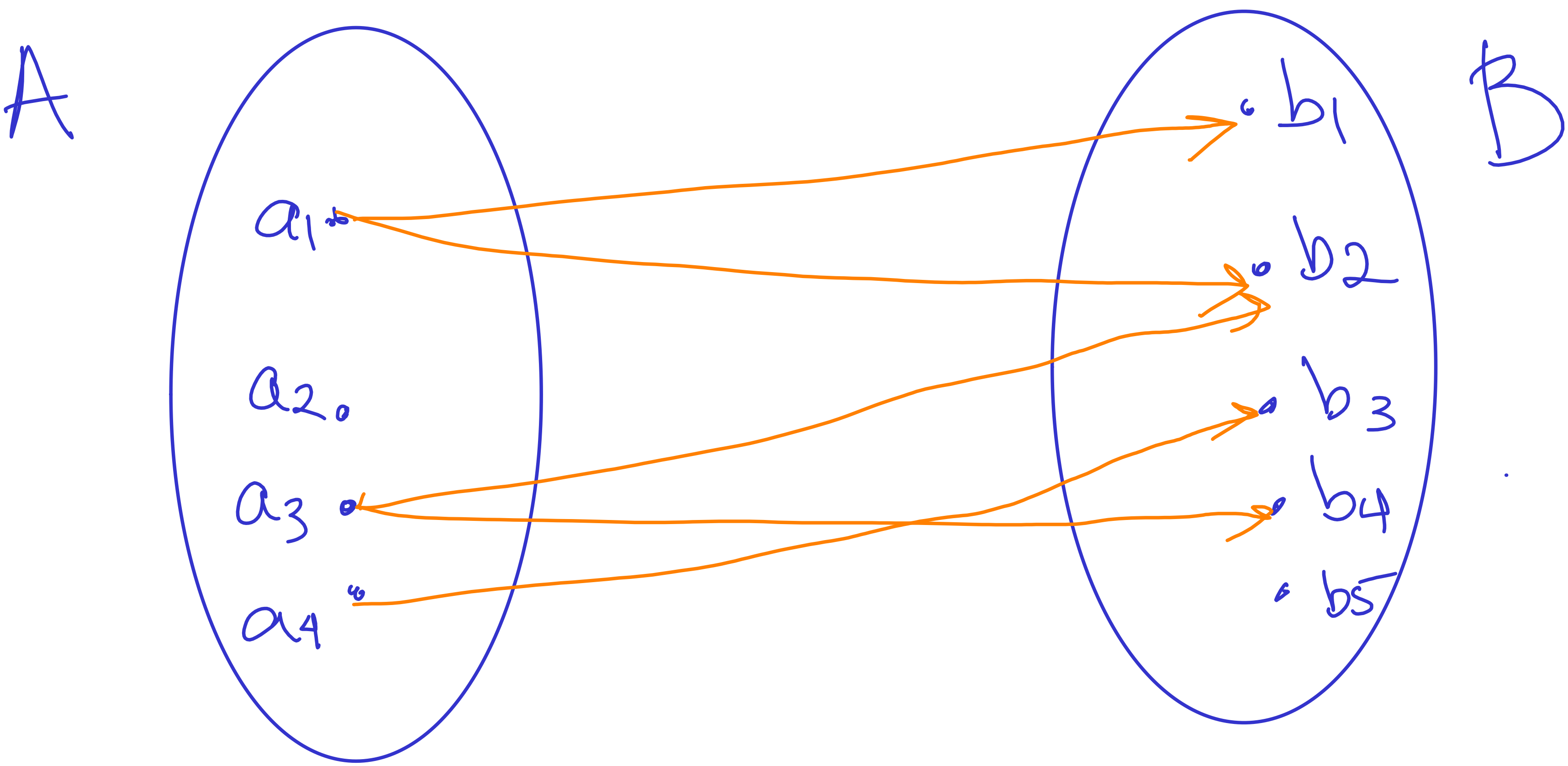
Ejemplo: En la relación del digrama anterior, $(p, f) \in R \iff$ A p le gusta la fruta f.

(Kevin, sandía), (Ruth, uva), (Oscar, manzana) $\in R$.

En otras palabras

$$R = \{(p, f) \in A \times B : A\ p \text{ le gosta } f\}.$$

$$\subseteq A \times B.$$



$$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_2), (a_3, b_4), (a_4, b_3)\} \subseteq A \times B.$$