Definición: Si A y B son conjuntos, una relación binaria entre A y B es un conjunto $R \subseteq A \times B$.

Definición: Si $R \subseteq A \times B$ es una relación, y si $(a,b) \in R$, decimos que a está relacionado con b mediante R.

Notación: $(a,b) \in R$ o bien aRb.

Ejemplo: En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\leq$ es una relación.

$\boxed{(1,2) \in \leq}$ o bien. $\boxed{1 \leq 2}$

$(4,4) \in \leq$ $4 \leq 4$.

En general, $a \leq b$ significa "a es menor o igual a b".

<u>Definición:</u> Si $R \subseteq A \times A$ es una relación, decimos que <u>R es una relación sobre A.</u>

<u>Ej:</u> $\leq$ es una relación sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplos: Si A y B son cjtos, ent:

(i) $\phi \subseteq A \times B$, por tanto ϕ es una relación entre A y B y se le llama la *relación vacía*.

(ii) $A \times B \subseteq A \times B$ y, por tanto, $A \times B$ es una relación entre A y B.
A esta relación se le llama *relación total entre A y B*.

Ej. Si $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$,

$A \times B = \{(2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$.

$\leq_{A\times B} = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$.

Ambos son ejs. de relaciones entre A y B.

$\geq_{A\times B} = \emptyset$.

<u>Definición</u>: Si A y B son conjuntos y R es una relación entre A y B, definimos a los siguientes conjuntos:

(I) $\operatorname{dom}(R) := \{x \in A : \exists y \in B \ (x,y) \in R\}$.

<u>Nota:</u> $\operatorname{dom}(R)$ se llama <u>dominio de R</u> y es un subconjunto de A.

(II) $\operatorname{im}(R) := \{ y \in B : \exists x \in A \ (x,y) \in R \}$.

Nota: $\operatorname{im}(R)$ se llama imagen de R y es un subconjunto de B.

Ejemplo: Sean H = Conjunto de todos los seres humanos

$\mathbb{N}$ = el conjunto de los números naturales.

Sea $C = \{ (h,n) \in H \times \mathbb{N}$: n es el número de cuenta de la institución UNAM de la persona $h \}$.

$\mathrm{dom}(C)$ = Los alumnos de la UNAM.

$\mathrm{im}(C)$ = El cjto. de todos los números de cta. de estudiantes de la UNAM.

Obs: $C \subseteq \mathrm{dom}(C) \times \mathrm{im}(C)$.

Ej: Si $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$ y

$$R = \left\{ \left(\pi, \tfrac{1}{3}\right), \left(e, \tfrac{1}{2}\right), (0,0), (10, 20^{20}) \right\}$$

$$\subseteq A \times B.$$

Ent. $\mathrm{dom}(R) = \{\pi, e, 0, 10\}$

$\mathrm{im}(R) = \left\{ \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, 0, 20^{20} \right\}$.

Obs: $\underbrace{R}_{\text{tiene 4 elementos}} \subseteq \underbrace{\mathrm{dom}(R) \times \mathrm{im}(R)}_{\text{tiene 16 elementos}}$

Nótese que $R \neq \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{im}(R)$ en general.

Nota: En ocasiones podemos tener a una relación R dada como un conjunto de pares ordenados sin que se nos diga explícitamente para qué conjuntos A y B se tiene que $R \subseteq A \times B$.

En ese caso, podemos ver a R como subcjto de $\mathrm{dom}(R) \times \mathrm{im}(R)$.

Ejemplo:

Sea $R = \{(p, k)$: k es la edad de p y p es un estudiante de la F.C. $\}$.

$\subseteq$ (Estudiantes de F.C.) $\times$ $\{k \in \mathbb{N}^+ : 10 \leq k \leq 100\}$.

El cjto de pares ordenados:

$S = \{(k, p)$: k es la edad de p y p es estudiante de la F.C. $\}$.

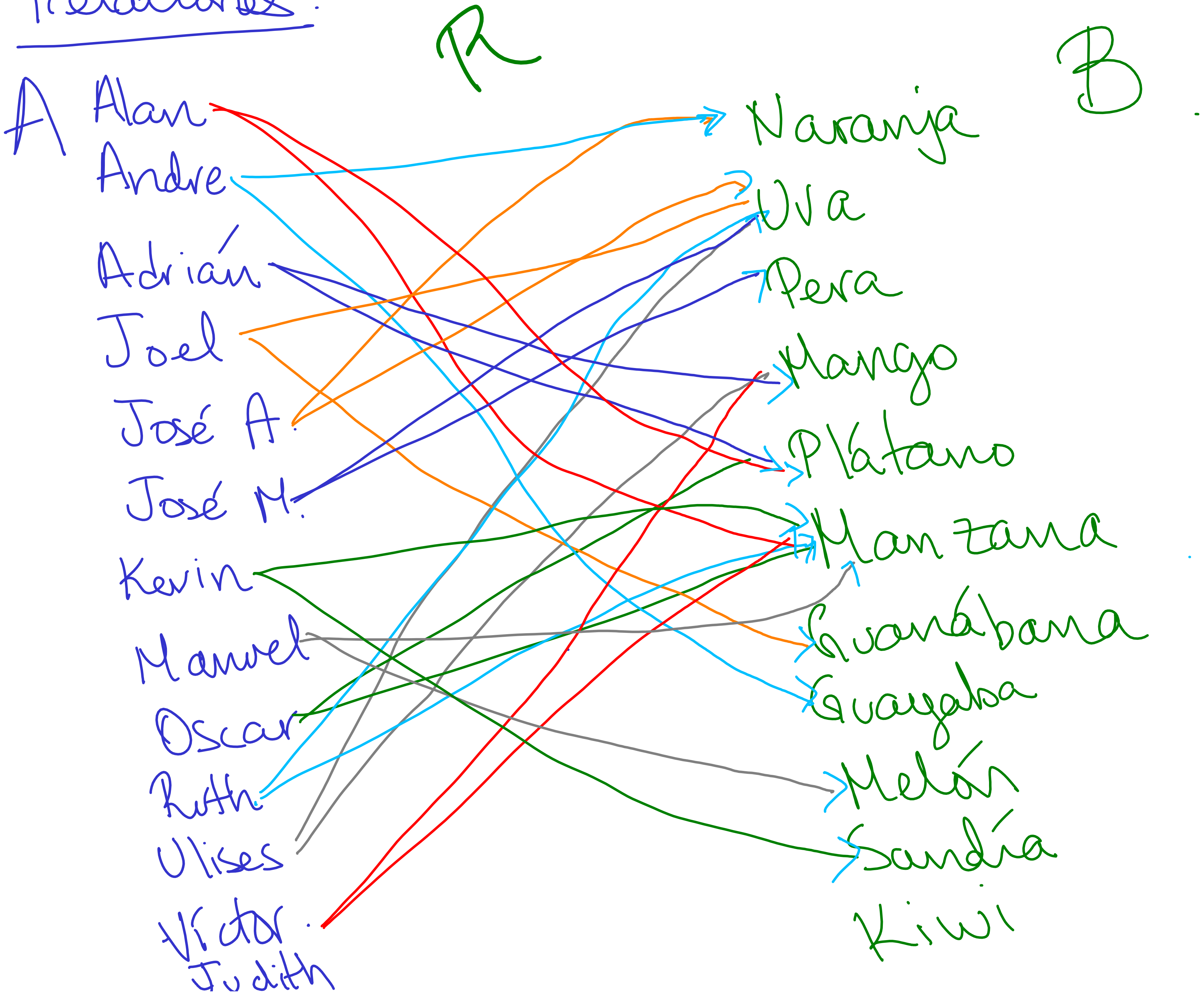
$\subseteq \{k \in \mathbb{N}^+ : 10 \leq k \leq 100\} \times$ (Estudiantes de F.C.)

Definición: Si R es una relación entre el conjunto A y el conjunto B, definimos a la relación inversa de R, denotada como R^{-1}, de la sig. forma:

$$R^{-1} = \{ (\underline{y}, \underline{x}) : (\underline{x}, \underline{y}) \in R \}.$$

Nótese que: $R^{-1} \subseteq \underline{im(R)} \times \underline{dom(R)}$.

Relaciones


R
A
B
Alan
Andre
Adrián
Joel
José A.
José M.
Kevin
Manuel
Oscar
Ruth
Ulises
Victor
Judith
Naranja
Uva
Pera
Mango
Plátano
Manzana
Guanábana
Guayaba
Melón
Sandía
Kiwi

- (Kevin, Manzana) $\in R$
- (José M., Pera) $\in R$.

- (Manzana, Kevin) $\in R^{-1}$.
- (Pera, José M.) $\in R^{-1}$.

Ejemplo:

Si $R = \{(1,10), (0,5), (3,1)\}$

ent $R^{-1} = \{(10,1), (5,0), (1,3)\}$

Ojo: $1 R 10$ y $10 R^{-1} 1$

- 1 está relacionado con 10 mediante R
- 10 está relacionado con 1 mediante R^{-1}.
- 10 no está relacionado con 1 mediante R.