Definición: Si R es una relación y A es un cjto, decimos que:

(i) R es reflexiva sobre A sii

$$\forall x \in A \ (x,x) \in R.$$

(ii) R es antirreflexiva sobre A sii

$$\forall x \in A \ (x,x) \notin R.$$

Llamamos $\Delta_A := \{(x,y) \in R : x = y \wedge x \in A\}$

$$= \{(x,x) \in R : x \in A\}.$$

Prop: R es ref. sobre $A \iff \Delta_A \subseteq R$.

Proposición: Sea R una relación y sea A un conjunto. Entonces:

(I) R es antirreflexiva sobre A

sii $R \cap \Delta_A = \emptyset$

(II) R no es reflexiva sobre A sii

$\Delta_A \not\subseteq R$ sii $R \cap \Delta_A \neq \Delta_A$

Dems: (I) $\Rightarrow$] Sup. que R es antirreflexiva sobre A.

Por definición, esto significa que

$\forall x \in A \ (x,x) \notin R$.

Sup. que $R \cap \Delta_A \neq \emptyset$ para llegar a una contradicción.

Ent. $\exists (x,y) \in R \cap \Delta_A$. Como $(x,y) \in \Delta_A$, ent

$x = y \wedge x \in A$. Ent $(x,x) \in R \cap \Delta_A$. En particular, esto implica que $(x,x) \in R$ con $x \in A$ ∎

Esto contradice el hecho de que R es antirreflexiva.

$\therefore R \cap \Delta_A = \phi$.

$\Leftarrow$] Sup que $R \cap \Delta_A = \phi$

P.D. R es antirreflexiva.

P.D $\forall x \in A \ (x,x) \notin R$.

Sea $x \in A$ arbitrario.

Como $(x,x) \in \Delta_A$, entonces, la igualdad $\Delta_A \cap R = \phi$ implica que $(x,x) \notin R$. ✓

∎

(II) Por Prop. anterior:

R es ref. sobre $A \iff \Delta_A \subseteq R$.

Tomando las dos contrapositivas esto implica que

R <u>no</u> es reflexiva sobre $A \iff \Delta_A \nsubseteq R$

Resta probar que $\Delta_A \nsubseteq R \iff R \cap \Delta_A \neq \Delta_A$.

$\Rightarrow$) Sup. que $\Delta_A \nsubseteq R$.

P.D. $R \cap \Delta_A \neq \Delta_A$.

Como $\Delta_A \nsubseteq R$, ent

$\exists \, (x,x) \in \Delta A$ pero $(x,x) \notin R$.

Ent $(x,x) \in \Delta_A$ pero $(x,x) \notin R \cap \Delta_A$.

$\therefore \Delta_A \neq R \cap \Delta_A$

$\Leftarrow]$ Sup que $R \cap \Delta_A \neq \Delta_A$.

P.D. $\Delta_A \not\subseteq R$.

Como $R \cap \Delta_A \subseteq \Delta_A$, ent. la hipótesis implica $\Delta_A \not\subseteq R \cap \Delta_A$.

Ent $\exists (x,x) \in \Delta_A \wedge (x,x) \notin R \cap \Delta_A$.

Ent $\exists (x,x) \in \Delta_A \wedge (x,x) \notin R$.

Por lo tanto, $\Delta_A \not\subseteq R$. $\blacksquare$

Ejemplos:

Sea $A = \{4, 5, 7\}$.

① R_1 reflexiva sobre A

$$R_1 = \{(4,5), (5,7), (4,4), (5,5), (7,7)\}.$$

$$\Delta_A \subseteq R.$$

② R_2 antirreflexiva sobre A

$$R_2 = \{(5,7), (7,5), (5,4)\}.$$

$$R_2 \cap \Delta_A = \phi.$$

③ R no reflexiva sobre A.

$$R_3 = \{(4,5), (5,4), (5,5), (7,7)\}$$

pues $(4,4) \in \Delta_A$ pero $(4,4) \notin R$.

④ R no antirreflexiva sobre A.

$R_4 = \{(4,5), (5,4), (5,5), (7,7)\}$.

$R_4 \cap \Delta_A \neq \phi$.

Antirreflexiva sobre A $\Rightarrow$ R no es reflex. sobre A

→ Antirreflexiva sobre A $\not\Rightarrow$ R es reflexiva.

Antirref $\Rightarrow$ (Ref. $\vee$ ¬Ref) ✓

$Q \Rightarrow (P \vee \neg P)$. ✓

→ Si R no es ref $\not\Rightarrow$ R no es antirref. sobre A sobre A.