Definición: Sea R una relación sobre un conjunto

Decimos que R es **simétrica** sii

$$\forall x \forall y \left((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \right).$$

Ejemplo: ① Si A = Conjunto de seres humanos y $R \subseteq A^2$ es t.q. $(x,y) \in R$ sii (x es hermano de y).

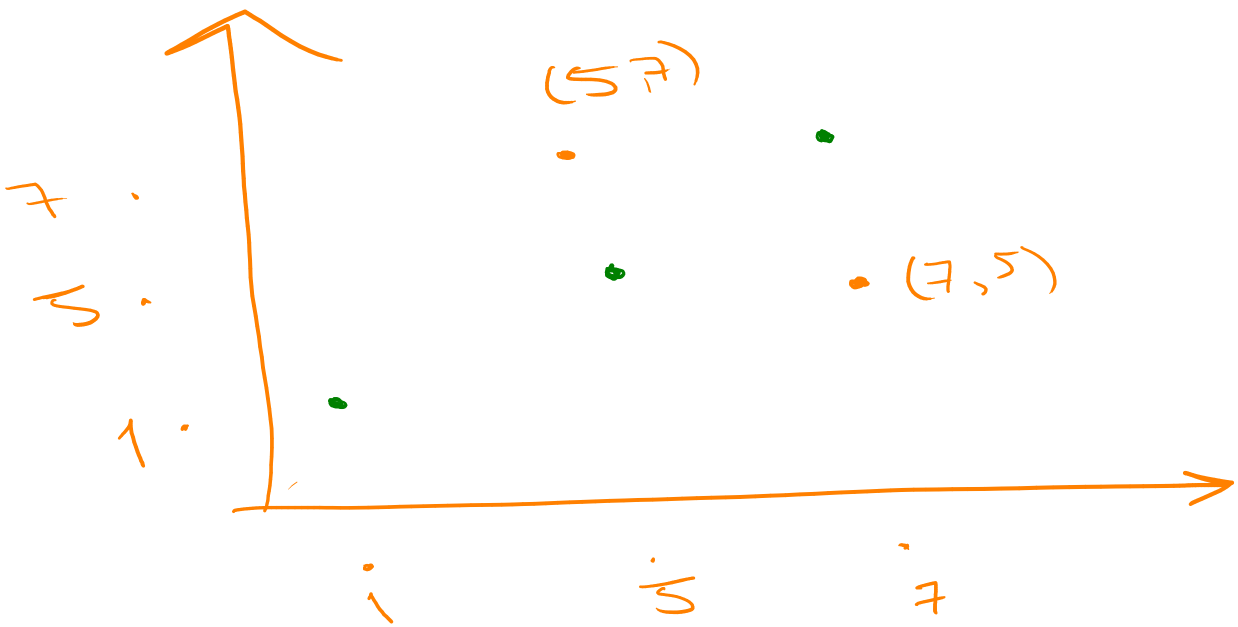
Ent. R es simétrica.

② Si $R \subseteq A^2$ es t.q. xRy sii x es papá de y, entonces R **no es simétrica**.

Ej Si $A=\{1,5,7\}$ y $R=\{(1,1),(5,7),(7,5),(5,5)\}$

R es una relación simétrica.

$$\begin{cases} (1,1)\in R \Rightarrow (1,1)\in R & \checkmark \\ (5,7)\in R \Rightarrow (7,5)\in R & \checkmark \\ (7,5)\in R \Rightarrow (5,7)\in R & \checkmark \\ (5,5)\in R \Rightarrow (5,5)\in R & \checkmark \end{cases}$$



② Si A es un cjto, la diagonal de A, Δ_A es una relación simétrica:

$$\forall x, y \left((x,y) \in \Delta_A \Rightarrow (y,x) \in \Delta_A \right).$$

Dem: Sean x y y arbitrarios t.q. $(x,y) \in \Delta_A$. Ent. $x = y$, ent

$(x,y) = (x,x) = (y,x)$

Ent. $(y,x) \in \Delta_A$.

Definición: Sea R una relación binaria. Decimos que R es antisimétrica sii

$$\forall x \forall y \left((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y \right).$$

Ejemplo:

① $R = \{(1,4), (2,3), (1,1), (2,2), (4,2), (3,3)\}$.

R es antisimétrica pues

$\forall x \forall y ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y)$.

② $R = \{(3,2), (2,3), (1,3)\}$.

R no es antisimétrica pues

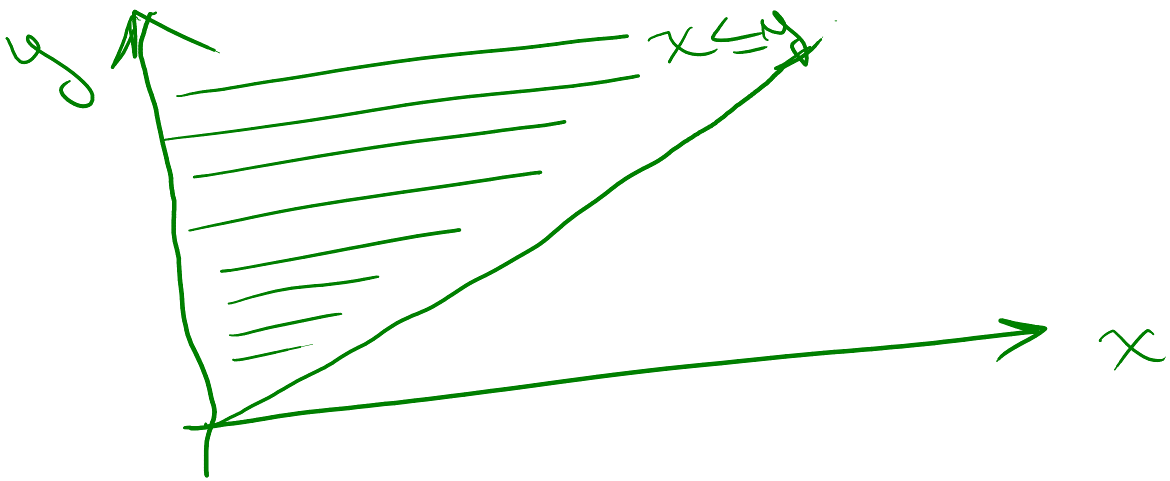
$\exists x = 3, \exists y = 2 ((2,3) \in R \wedge (3,2) \in R \wedge 2 \neq 3)$.

③ Si $A = \{1, 7, 9\}$, $\Delta_A = \{(1,1), (7,7), (9,9)\}$

es una relación antisimétrica.

4. La relación $\leq$ sobre el conjunto $\mathbb{R}$ es antisimétrica:

$$\forall x \in \mathbb{R} \, \forall y \in \mathbb{R} \, (x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y).$$



5. $R = \{(1,2)\}$

R es antisimétrica:

$$\forall x \forall y \big(\underbrace{(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R}_{\text{es falso siempre en ésta } R} \Rightarrow x = y \big)$$

En las relaciones antisimétricas no hay elementos simétricos fuera de la diagonal.

6. La relación $\subseteq$ sobre el conjunto $\mathcal{P}(A)$, es antisimétrica:

$$\forall B \in \mathcal{P}(A)\ \forall C \in \mathcal{P}(A)\ (B \subseteq C \land C \subseteq B \Rightarrow B = C).$$

"$\subseteq$" $\subseteq (\mathcal{P}(A))^2$.

Ej: $A = \{1, 2\}$.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

La relación "$\subseteq$" sobre $\mathcal{P}(A)$:

$\emptyset \subseteq \emptyset$, $\quad \emptyset \subseteq \{1\}$, $\emptyset \subseteq \{2\}$, $\emptyset \subseteq \{1,2\}$.

$\{1\} \subseteq \{1,2\}$, $\quad \{1\} \subseteq \{1\}$,

$\{2\} \subseteq \{1,2\}$, $\quad \{2\} \subseteq \{2\}$.

$\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$.

$$\subseteq = \{ (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1,2\}),$$
$$(\{1\}, \{1,2\}), (\{1\}, \{1\}),$$
$$(\{2\}, \{1,2\}), (\{2\}, \{2\}),$$
$$(\{1,2\}, \{1,2\}) \}.$$