"La implicación es 'transitiva'":

Si $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow R$, ent. $P \Rightarrow R$.

<u>Definición</u>: Sea R una relación binaria sobre un conjunto A. Decimos que R es <u>transitiva</u> si y sólo si

$$\forall x \forall y \forall z \left(\left((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \right) \Rightarrow (x,z) \in R \right)$$

<u>Ejemplos</u>:

① Sea R la relación entre personas t.q.

$x R y$ si y sólo si x y y tienen los mismos padres.

Ent. R es una relación transitiva.

(2) La relación entre proposiciones t.q. PRQ si y sólo si $P \Rightarrow Q$ es también una relación transitiva.

(3) Sea $A = \{1, 3, 5\}$ y sea

$$R = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,5), (1,5)\}.$$

¿Es R una relación transitiva?

No, pues $[(3,1) \in R \wedge (1,3) \in R] \wedge (3,3) \notin R$.

$$R = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,5), (1,5), (3,3)\}.$$

$(1,1)\in R \wedge (1,3)\in R \quad \wedge \quad (1,3)\in R$ ✓

$(1,1)\in R \wedge (1,5)\in R \quad \wedge \quad (1,5)\in R$ ✓

$(1,3)\in R \wedge (3,1)\in R \quad \wedge \quad (1,1)\in R$ ✓

$(1,3)\in R \wedge (3,5)\in R \quad \wedge \quad (1,5)\in R$ ✓

$(1,3)\in R \wedge (3,3)\in R \quad \wedge \quad (1,3)\in R$ ✓

$(3,1)\in R \wedge (1,1)\in R \quad \wedge \quad (3,1)\in R$ ✓

$(3,1)\in R \wedge (1,3)\in R \quad \wedge \quad (3,3)\in R$ ✓

$(3,1)\in R \wedge (1,5)\in R \quad \wedge \quad (3,5)\in R$ ✓

$(3,3)\in R \wedge (3,1)\in R \quad \wedge \quad (3,1)\in R$ ✓

$(3,3)\in R \wedge (3,5)\in R \quad \wedge \quad (3,5)\in R$ ✓

$\therefore$ R es transitiva.

4 Sea $A=\{1,2,3\}$ y sea

$R=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

R es transitiva:

- $(1,2) \in R \wedge (2,3) \in R \wedge (1,3) \in R$. ✓

5. $R = \{(1,2),(1,3)\}$ es transitiva.

6. $R = \{(1,2)\}$ es transitiva.

7. $R = \emptyset$ es transitiva pues:

$$\forall x \forall y \forall z \left(\left((x,y) \in \emptyset \wedge (y,z) \in \emptyset \right) \Rightarrow (x,z) \in \emptyset \right)$$

Proposición: La relación $R = \emptyset$ cumple lo siguiente:

(i) $\emptyset$ es reflexiva sobre el conjunto $\emptyset$

$$\emptyset = \emptyset \times \emptyset \text{ pues: } \forall x \left(x \in \emptyset \Rightarrow (x,x) \in \emptyset \times \emptyset \right)$$

(ii) $\emptyset$ no es reflexiva sobre un conjunto $A \neq \emptyset$:

$R = \phi \times \phi \subseteq A \times A = A^2$.

pues no es cierto que

$\forall x (x \in A \Rightarrow (x,x) \in \phi \times \phi) = \phi$, ya que, como $\exists a \in A$,

pero $(a,a) \notin \phi \times \phi$, ent. la relación no es reflexiva sobre A.

(iii) ¿ϕ es una relación simétrica?

Sí pues:

$$\forall x \, \forall y \, ((x,y) \in \phi \Rightarrow (y,x) \in \phi).$$

es verdadero por vacuidad.

(iv) ¿ϕ es una relación antisimétrica?

Sí pues:

$$\forall x \, \forall y \, (((x,y) \in \phi \wedge (y,x) \in \phi) \Rightarrow x = y).$$

es verdadero por vacuidad.

(v) ϕ es una relación transitiva.

(vi) ϕ es antirreflexiva sobre cualquier conjunto A.

$$\forall x \in A \; (\underline{(x,x) \notin \phi})$$

$\blacksquare$