Relaciones de equivalencia.

La relación R sobre $\mathbb{Z}$ dada por

$$(x,y) \in R \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x-y=2k$$

- es reflexiva sobre $\mathbb{Z}$.
- es simétrica y
- es transitiva.

En $\mathbb{R}$, definimos la relación R de modo que

$$(a,b) \in R \iff a=b.$$

En ecs lineales: $\underbrace{x+3}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{7}_{\in\mathbb{R}}$,

$$(4+3,7) \in R$$

Definición: Sea A un conjunto y sea R una relación sobre A. Decimos que R es una relación de equivalencia si y sólo si:

(i) R es reflexiva sobre A.

(ii) R es simétrica.

(iii) R es transitiva.

Ejemplo: La relación $=$ sobre el conjunto $\mathbb{R}$ es de equivalencia:

(i) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a = a$ $\quad$ ($=$ es reflexiva sobre $\mathbb{R}$)

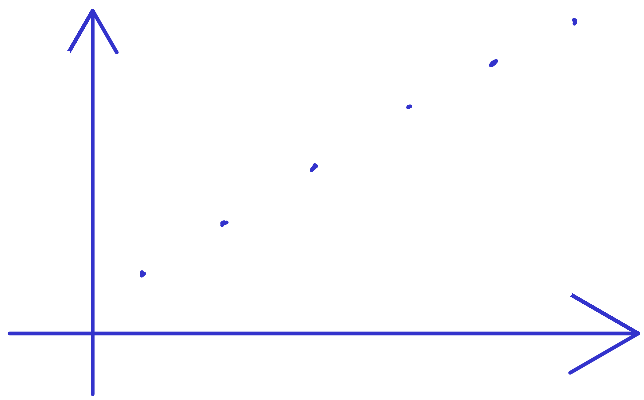
(ii) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a = b \Rightarrow b = a)$ $\quad$ ($=$ es simétrica)

(iii) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad ((a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c)$ $\quad$ ($=$ es transitiva)

Ejemplo: Si A es un conjunto cualquiera,

$$\Delta_A := \{ (a,a) : a \in A \} \subseteq A^2$$

Δ_A es una relación de equivalencia sobre A.



(i) Δ_A es reflexiva sobre A. ✓

(ii) Δ_A es simétrica:

$$\forall x,y \in A \left((x,y) \in \Delta_A \Rightarrow (y,x) \in \Delta_A \right)$$

pues $(x,y) \in \Delta_A \Leftrightarrow x = y$.

(iii) Δ_A es transitiva:

P.D. $\forall x,y,z \in A \left(((x,y) \in \Delta_A \wedge (y,z) \in \Delta_A) \Rightarrow (x,z) \in \Delta_A \right)$

Sean $x, y, z \in A$ tales que $(x,y) \in \Delta_A \wedge (y,z) \in \Delta_A$.

Ent. $x = y \wedge y = z$.

Ent $x = z$ y, por tanto, $(x,z) \in \Delta_A$

$\therefore \Delta_A$ es transitiva. $\blacksquare$

Nótese que Δ_A es la relación "igualdad" entre los elementos de A.

Ejemplo: Sea $A = \{10, 20, 30\}$ y sea

$$R = \{(10,10), (20,20), (30,30), (10,20), (20,10)\}.$$

Entonces, R es una relación de equivalencia sobre A.