Definición: Sean A un cjto. y $R \subseteq A^2$ es una relación de equivalencia sobre A si y sólo si R es reflexiva sobre A, R es simétrica y R es transitiva.

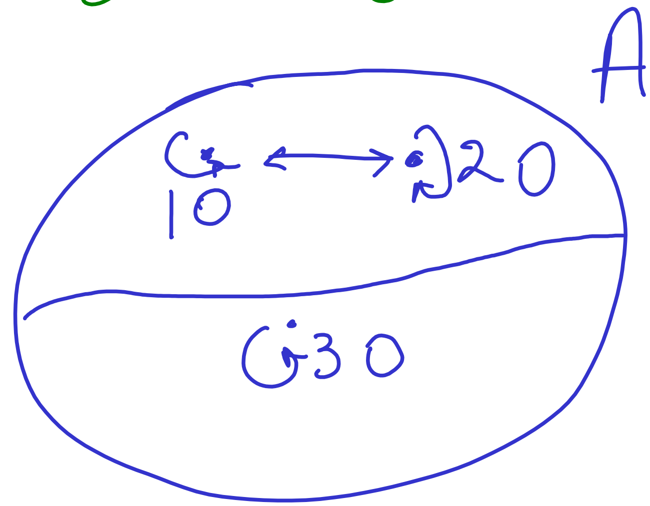
Definición: Sean A un cjto y R una rel. de equiv. sobre A. Dada $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a, como el conjunto:

$$[a] := \{x \in A : x \sim a\}.$$

Ejemplo: Sean $A = \{10, 20, 30\}$, y
$R = \{(10,10), (20,20), (30,30), (10,20), (20,10)\}$.
Aquí: $[10] = \{10, 20\}$.

$$[20] = \{20, 10\} = \{10, 20\}.$$

$$[30] = \{30\}.$$



Nótese que $[10] = [20]$.

En este ejemplo, dos clases de equivalencia son iguales sii los elementos están relacionados:

$$[a] = [b] \Rightarrow (a,b) \in R.$$

<u>Proposición:</u> Si A es un cjto y R es una rel. de equiv. sobre A, entonces, $\forall a, b \in A$

$$[a] = [b] \Leftrightarrow (a,b) \in R.$$

<u>Dems:</u> Sean A y R como en las hipótesis.

$\Rightarrow]$ Sup que $[a]=[b]$.

P.D $(a,b)\in R$.

Como R es reflexiva, entonces, $(a,a)\in R$.

Por tanto, $a\in[a]=\{x\in A : (x,a)\in R\}$.

$\therefore$ Como $a\in[b]=\{x\in A: (x,b)\in R\}$.

Por tanto, $(a,b)\in R$.

$\Leftarrow]$ Sup. que $(a,b)\in R$. P.D: $[a]=[b]$.

$\subseteq]$ Sea $x\in[a]$. Ent. $(x,a)\in R$.

P.D. $x\in[b]$.

P.D: $(x,b)\in R$.

Como $(x,a)\in R \wedge (a,b)\in R$, entonces, por transitividad de R, $(x,b)\in R$.

$\therefore x\in [b]$

$\therefore [a]\subseteq [b]$.

$\supseteq$) Sea $x\in [b]$. P.D. $x\in [a]$.

Por hip, $(x,b)\in R \wedge (a,b)\in R$.

Como R es simétrica, entonces

$(x,b)\in R \wedge (b,a)\in R$.

Ent., por transitividad de R, $(x,a)\in R$.

$\therefore x\in [a]$.

$\therefore [a]=[b]$.

$\blacksquare$

__Ejemplo__ En $A=\mathbb{R}$ y con la relación $R=$"$=$".

$$xRy \iff x=y.$$

Si $x\in\mathbb{R}$, $[x]=\{x\}$.

__Ejemplo:__ Si $A=\mathbb{Z}$ y R es la relación sobre $\mathbb{Z}$ t.q.

$(x,y)\in R \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ x-y=2k$, ent. R es una relación de equivalencia:

(i) R es reflexiva sobre $\mathbb{Z}$ (por examen).

(ii) R es simétrica:

P.D: $\forall x,y\in\mathbb{Z}\ \big((x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R\big)$

Sean $x,y\in\mathbb{Z}$. Sup que $(x,y)\in R$.

Ent. $\exists k\in\mathbb{Z}\ (x-y=2k)$.

Ent: $y - x = 2(-k)$ con $-k \in \mathbb{Z}$.

Ent. $(y,x) \in R$.

$\therefore$ R es simetrica.

(iii) P.D. R es transitiva.

P.D. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \left(\left((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \right) \Rightarrow (x,z) \in R \right)$.

Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ t.q.

$(x,y) \in R \ \wedge \ (y,z) \in R$.

Ent. $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = 2 \cdot k$ y

$\exists m \in \mathbb{Z} \quad y - z = 2 \cdot m$.

Luego $x - z = (x - y) + (y - z) = 2 \cdot k + 2 \cdot m = 2(k+m)$

con $k+m \in \mathbb{Z}$.

$\therefore (x,z) \in R$.

$\therefore R$ es transitiva.

$\therefore R$ es una relación de equivalencia:

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : (x,0) \in R\}.$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - 0 = 2k\}.$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k\},$$

que es el conjunto de números pares.

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : (x,1) \in R\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - 1 = 2k\}.$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k+1\},$$ que es el

conjunto de los números impares.