Ejemplo: Sea R la relación sobre $\mathbb{R}$ definida como

$(x,y) \in R$ si y sólo si $x-y \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos de pares ordenados en R son:

$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in R$ pues $\sqrt{2}-\sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Z}$.

$(\pi, \pi+27) \in R$ pues $\pi-(\pi+27) = -27 \in \mathbb{Z}$.

$\left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right) \in R$ pues $\frac{6}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1 \in \mathbb{Z}$.

Veamos que R es de equivalencia:

(i) P.D. P.D R es reflexiva sobre $\mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. P.D. $(x,x) \in R$.

Como $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, ent $(x,x) \in R$.

$\therefore R$ es reflexiva sobre $\mathbb{R}$.

(ii) P.D. R es simétrica.

P.D. $\forall x,y \in \mathbb{R} \left((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \right)$.

Sean $x,y \in \mathbb{R}$ t.q. $(x,y) \in R$.

Ent. $x - y \in \mathbb{Z}$.

Luego, $y - x = -(x-y) \in \mathbb{Z}$ pues $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo inversos aditivo.

Ent. $(y,x) \in R$.

$\therefore R$ es simétrica.

(iii) P.D R es transitiva.

P.D. $\forall x,y,z \in \mathbb{R} \left(\left((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \right) \Rightarrow (x,z) \in R \right)$.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ t.q. $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$.

Entonces $x-y \in \mathbb{Z} \wedge y-z \in \mathbb{Z}$.

Luego $x-z = (x-y)+(y-z) \in \mathbb{Z}$ pues $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo la suma.

Ent $(x,z) \in R$.

Ent. R es transitiva.

Esto muestra que R es una relación de equivalencia. $\blacksquare$

Dado $a \in \mathbb{R}$, la clase de equivalencia de a es:

$$[a] = \{x \in \mathbb{R} : x R a\}.$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x-a \in \mathbb{Z}\}.$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - a = k\}.$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = a + k\}.$$

$$\boxed{= a + \mathbb{Z}.} \longrightarrow \text{Notación.}$$

$$[\sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \sqrt{2} + k\}$$

$$= \sqrt{2} + \mathbb{Z}.$$

Obs: $\sqrt{2} + k \notin \mathbb{Z}$ si $k \in \mathbb{Z}$ pues si $\sqrt{2} + k \in \mathbb{Z}$, ent. $\sqrt{2} = \sqrt{2} + k - k \in \mathbb{Z}$ ⚡.

Ayer vimos que si R es rel. de equiv. sobre A, ent, $\forall x, y \in A$.

$$[x] = [y] \iff x R y.$$

Obs: Si $m \in \mathbb{Z}$,

$$[m] = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}\ x - m = k\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}\ x = k + m\}.$$

$$\overset{!}{=} \mathbb{Z}.$$

$\subseteq$] Si $x \in [m]$, ent $\exists k \in \mathbb{Z}$ $x = k + m \in \mathbb{Z}$

Ent $[m] \subseteq \mathbb{Z}$.

$\supseteq$] Si $x \in \mathbb{Z}$. Ent $x - m \in \mathbb{Z}$.

Ent. $x R m$, es decir $x \in [m]$ ∎

En particular $[0] = \mathbb{Z}$.

$$E_j\left[\tfrac{1}{2}\right] = \left\{ x \in \mathbb{R} : x - \tfrac{1}{2} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists\, k \in \mathbb{Z} \;\; x - \tfrac{1}{2} = k \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists\, k \in \mathbb{Z} \;\; x = \tfrac{1}{2} + k \right\}.$$

$$\boxed{= \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}.}$$