

Ejemplo: Sea $A = [0, 24) \subseteq \mathbb{R}$.

Sea \sim la relación sobre A t. q.

$$x \sim y \iff (x=y \vee x=y+12 \vee y=x+12).$$

Ej: $1 \sim 13$ y $[1] = [13]$

Con $x=1, y=13$

y $13 = 1 + 12$.

Veamos que \sim es reflexiva sobre $A = [0, 24)$.

Sea $x \in A$. Como $x=x$, ent $x \sim x$.

Ent \sim es reflexiva.

Veamos que \sim es simétrica.

P.D. $\forall x, y \in [0, 24) (x \sim y \iff y \sim x)$.

Sean $x, y \in [0, 24)$ tales que $x \sim y$.

Caso 1. Si $x = y$, entonces $y = x$, por tanto,
 $y \sim x$.

Caso 2: Si $x = y + 12$

P.D: $y \sim x$

P.D: $(y = x \vee y = x + 12 \vee x = y + 12) \dots (*)$

Por hip $x = y + 12$, así que $(*)$ es \vee .

$\therefore y \sim x$.

Caso 3: Si $y = x + 12$,

P.D: $y \sim x$

P.D: $y = x \vee y = x + 12 \vee x = y + 12$.

$\therefore \sim$ es simétrica.

También se puede ver que \sim es transitiva.

$$\text{PD: } \forall x, y, z ((x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z).$$

$$[1] = \{1, 13\}.$$

$$[0] = \{0, 12\} = [12].$$

Proposición: Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Entonces se cumple:

$$(1) \forall x, y \in A \quad x R y \Leftrightarrow [x] = [y].$$

$$(2) \forall x, y \in A \quad x \not R y \Leftrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset.$$

Dems: (1) ya lo probamos

Vemos que se cumple (2).

Sean $x, y \in A$.

\Rightarrow Por contrapositiva, supongamos
que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$

P.D. $x R y$.

Como $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, ent.

$\exists z \in [x] \cap [y]$. Ent $z \in [x] \wedge z \in [y]$

Ent. $z R x \wedge z R y$.

Por simetría, como $z R x$, ent

$x R z$.

Como también $z R y$, por transitividad

$x R y$.

\Leftrightarrow Por contrapositiva, sup. que

$x R y$.

P.D. $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

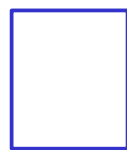
Como $x R y$, ent. $x \in [y]$.

Además, como R es reflexiva,
también tenemos que $x R x$

$\therefore x \in [x]$.

Por tanto, $x \in [x] \cap [y]$.

Ent. $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.



Definición: Sea A un conjunto y sea R una relación de equivalencia sobre A .

Definimos al conjunto cociente de A sobre R como

$$A/R = \{ [a] : a \in A \}.$$

Ejemplo, en el ejemplo inicial,

$$[0, 24) / \mathcal{R} = \{ [a] : a \in [0, 12] \}$$

$$[1] = [13].$$