Ejemplo: Sea $A = [0, 24) \subseteq \mathbb{R}$.

Sea $\sim$ la relación sobre A t.q.

$$x \sim y \Leftrightarrow (x = y \vee x = y+12 \vee y = x+12).$$

Ej: $1 \sim 13$ y $[1] = [13]$

Con $x=1, y=13$

y $13 = 1+12$.

Veamos que $\sim$ es reflexiva sobre $A = [0, 24)$.

Sea $x \in A$. Como $x = x$, ent $x \sim x$.

Ent $\sim$ es reflexiva.

Veamos que $\sim$ es simétrica.

P.D. $\forall x, y \in [0, 24) \, (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$.

Sean $x, y \in [0, 24)$ tales que $x \sim y$.

Caso 1. Si $x = y$. entonces $y = x$ y, por tanto,

$y \sim x$.

Caso 2: Si $x = y + 12$

P.D: $y \sim x$

P.D: $(y = x \vee y = x + 12 \vee x = y + 12)$ ---- $(*)$

Por hip $x = y + 12$, así que $(*)$ es V.

$\therefore y \sim x$.

Caso 3: Si $y = x + 12$,

P.D: $y \sim x$

P.D: $y = x \vee y = x + 12 \vee x = y + 12$.

$\therefore \sim$ es simétrica.

También se puede ver que $\sim$ es transitiva.

PD: $\forall x, y, z\left(\left(x \sim y \wedge y \sim z\right) \Rightarrow x \sim z\right)$.

$[1] = \{1, 13\}$.

$[0] = \{0, 12\} = [12]$.

<u>Proposición</u>: Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Entonces se cumple:

(1) $\forall x, y \in A \quad xRy \iff [x] = [y]$.

(2) $\forall x, y \in A \quad x \not R y \iff [x] \cap [y] = \emptyset$.

<u>Dem</u>: (1) ya lo probamos

Veamos que se cumple (2).

Sean $x, y \in A$.

$\Rightarrow]$ Por contrapositiva, supongamos que $[x] \cap [y] \neq \phi$

P.D. xRy.

Como $[x] \cap [y] \neq \phi$, ent.

$\exists z \in [x] \cap [y]$. Ent $z \in [x] \wedge z \in [y]$.

Ent. $zRx \wedge zRy$.

Por simetría, como zRx, ent xRz.

Como también zRy, por transitividad xRy.

$\Leftarrow$ Por contrapositiva, sup. que $x \not R y$.

P.D. $[x] \cap [y] \neq \phi$.

Como xRy, ent. $x \in [y]$.

Además, como R es reflexiva, también tenemos que xRx

$\therefore x \in [x]$.

Por tanto, $x \in [x] \cap [y]$.

Ent. $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

$\square$

Definición: Sea A un conjunto y sea R una relación de equivalencia sobre A.

Definimos al conjunto cociente de A sobre R como

$$A/_R = \{[a] : a \in A\}.$$

Ejemplo, en el ejemplo inicial,

$$[0,24)/_R = \{[a] : a \in [0,12]\}$$

$$[1] = [13].$$