Def. Si A es un cjto y R una rel. de equiv. sobre A, llamamos conjunto cociente al cjto.

$$A/_R = \{ [a] : a \in A \}.$$

Si $a \in A$ $[a] = \{ y \in A : y \sim a \} \subseteq A$.

Def: Si A es un cjto y R una rel. de equiv. sobre A, ent. dada una clase de equivalencia $[a] \in A/_R$, si $b \in [a]$, entonces decimos que b es un representante de $[a]$.

Ejemplo: Sea $A = \{70, 80, 90\}$ y sea

$$R = \{ (70,70), (70,90), (80,80), (90,70), (90,90) \}.$$

R es de equivalencia sobre A.

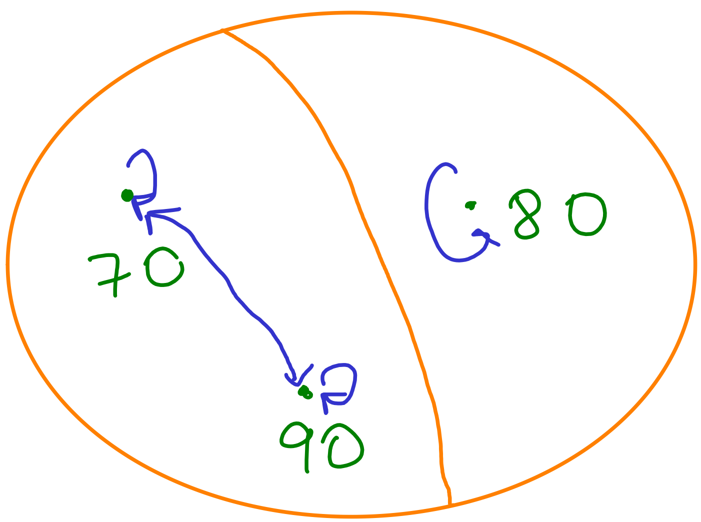
$[70] = \{70, 90\}$

$[80] = \{80\}$

$[90] = \{70, 90\} = [70]$.

Ent. $A/R = \underline{\{\{70, 90\}, \{80\}\}} = \underline{\{[70], [80]\}}$.

$= \underline{\{[90], [80]\}}$.



<u>70 es un representante</u> de $[70]$

y también es representante de $[90]$.

80 es un representante de $[80]$.

Notemos que: $\cdot\ [70] \cap [80] = \emptyset$

$\cdot\ [70] \neq \emptyset$ y $[80] \neq \emptyset$

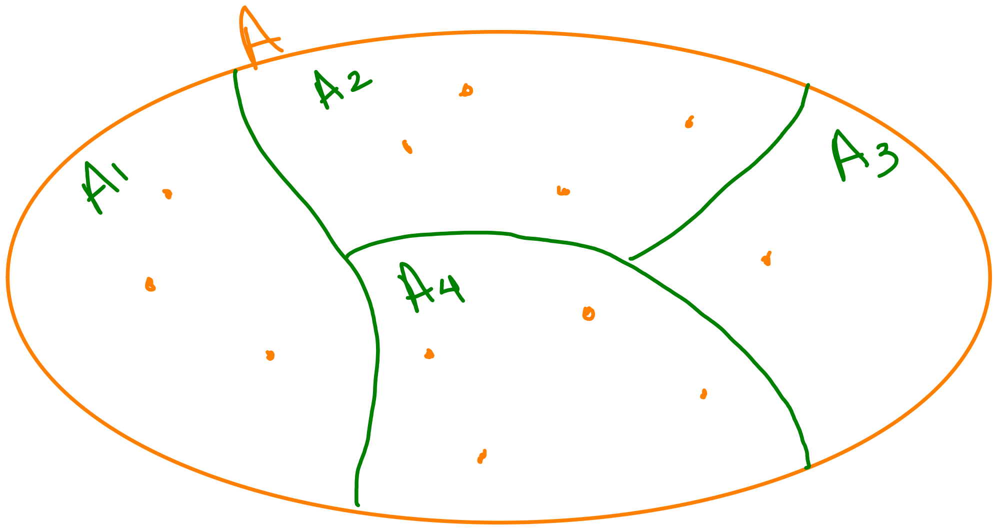
$\cdot\ [70] \cup [80] = A.$

__Definición:__ Dado un conjunto A, una colección de la forma $\mathcal{P} = \{A_i : i \in I\}$ con $A_i \subseteq A$ para toda $i \in I$ es llamada una __partición de A__ sii se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $A_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I.$

(2) Si $i \neq j$ ent. $A_i \cap A_j = \emptyset.$

(3) $\boxed{A = \bigcup_{i \in I} A_i} =: \{x : \exists i \in I (x \in A_i)\}.$



Ejemplo: Sea $A=\{70,80,90\}$, una partición de A es el conjunto

$$\mathcal{P}=\{\{70,90\},\{80\}\}.$$

Ejemplo: Si $A=\mathbb{Z}$, entonces

$$\mathcal{P}=\{\{m\in\mathbb{Z} : m>0\},\{m\in\mathbb{Z} : m<0\},\{0\}\}$$

es una partición:

(1) $\underbrace{\{m\in\mathbb{Z} : m>0\}}_{\text{pues } 1>0 \text{ y } 1\in\mathbb{Z}}\neq\emptyset$, $\underbrace{\{m\in\mathbb{Z} : m<0\}}_{\text{pues } -1<0 \text{ y } 1\in\mathbb{Z}}\neq\emptyset$, $\underbrace{\{0\}\neq\emptyset}_{\text{pues } 0\in\{0\}}$.

(2) $\{m\in\mathbb{Z} : m>0\} \cap \{m\in\mathbb{Z} : m<0\} = \emptyset$

$\{m\in\mathbb{Z} : m>0\} \cap \{0\} = \emptyset$

$\{m\in\mathbb{Z} : m<0\} \cap \{0\} = \emptyset$

(3) $\{m\in\mathbb{Z} : m<0\} \cup \{m\in\mathbb{Z} : m<0\} \cup \{0\} = \mathbb{Z}$

Por (1), (2) y (3), $\mathcal{P}$ es una partición de $\mathbb{Z}$.

Sea $\mathcal{P} = \{\{m\in\mathbb{Z} : m \text{ es par}\}, \{m\in\mathbb{Z} : m \text{ es impar}\}\}$.

(1) Como $0\in\{m\in\mathbb{Z} : m \text{ es impar}\}$ y

$1\in\{m\in\mathbb{Z} : m \text{ es impar}\}$, ent

ambos conjuntos son no vacíos.

(2) Como no hay números que sean pares e impares a la vez, ent.

$$\{m \in \mathbb{Z} : m \text{ es par}\} \cap \{m \in \mathbb{Z} : m \text{ es impar}\} = \emptyset$$

(3) Como todo número entero es par o es impar, ent.

$$\{m \in \mathbb{Z} : m \text{ es par}\} \cup \{m \in \mathbb{Z} : m \text{ es impar}\} = \mathbb{Z}.$$

$\therefore$ P es una partición de $\mathbb{Z}$.