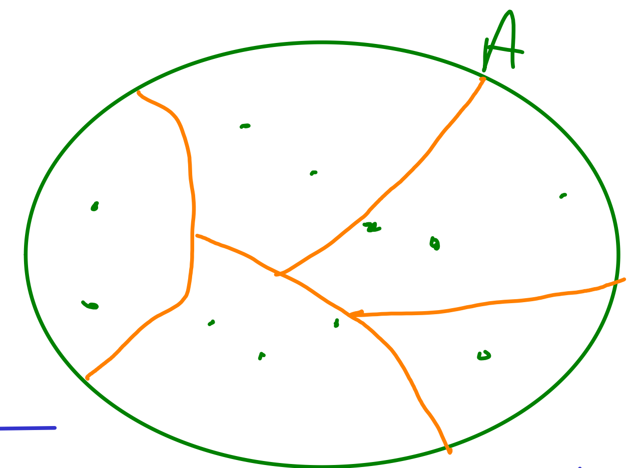
Def. Si A es un conjunto y si $\mathcal{P}=\{A_i : i\in I\}$ es una familia de subconjuntos de A, decimos que $\mathcal{P}$ es una partición de A sii

(I) $A_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I$.

(II) Si $A_i \neq A_j$, ent $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(III) $A = \bigcup_{i\in I} A_i$.



Teorema: Sea A un conjunto y sea R una relación de equivalencia sobre A. Entonces:

(I) $\forall a \in A \quad [a] := \{x \in A : xRa\} \neq \emptyset$

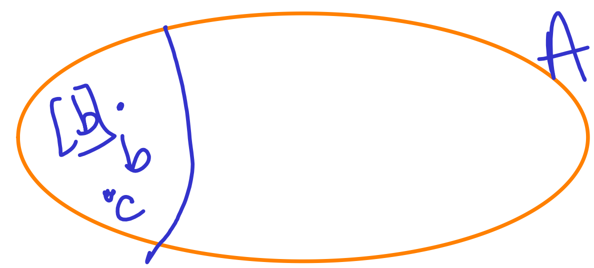
(II) Si $a \not R b$, entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$

(III) $A = \bigcup_{a\in A} [a]$.

Dem: Sea R una rel. de equiv. sobre A.

(I) Sea $a \in A$ arbitrario. Entonces, como aRa, pues R es reflex, ent $a \in [a]$. Ent. $[a] \neq \emptyset$.

(II) Sean $a, b \in A$. Si $a \not R b$, ent $[a] \neq [b]$ por primera prop. que probamos acerca de las clases de equivalencia. Por la prop. de la clase del martes 12, esto implica que $[a] \cap [b] = \emptyset$.



(III) P.D: $A = \bigcup_{a \in A} [a]$.

$\supseteq$] Como $\forall a \in A$, $[a] = \{x \in A : xRa\} \subseteq A$, ent. $\bigcup_{a \in A} [a] \subseteq A$.

elemento. conjunto.

$\subseteq$] Sea $b \in A$. P.D: $b \in \bigcup_{a \in A} [a]$.

Como $b \in A$ y bRb por reflexividad de R, entonces $b \in [b]$. Ent $\exists a = b$ t.q. $b \in [a]$

$\therefore b \in \bigcup_{a \in A} [a] \left(= \{ x : \exists a \in A \ x \in [a] \} \right)$

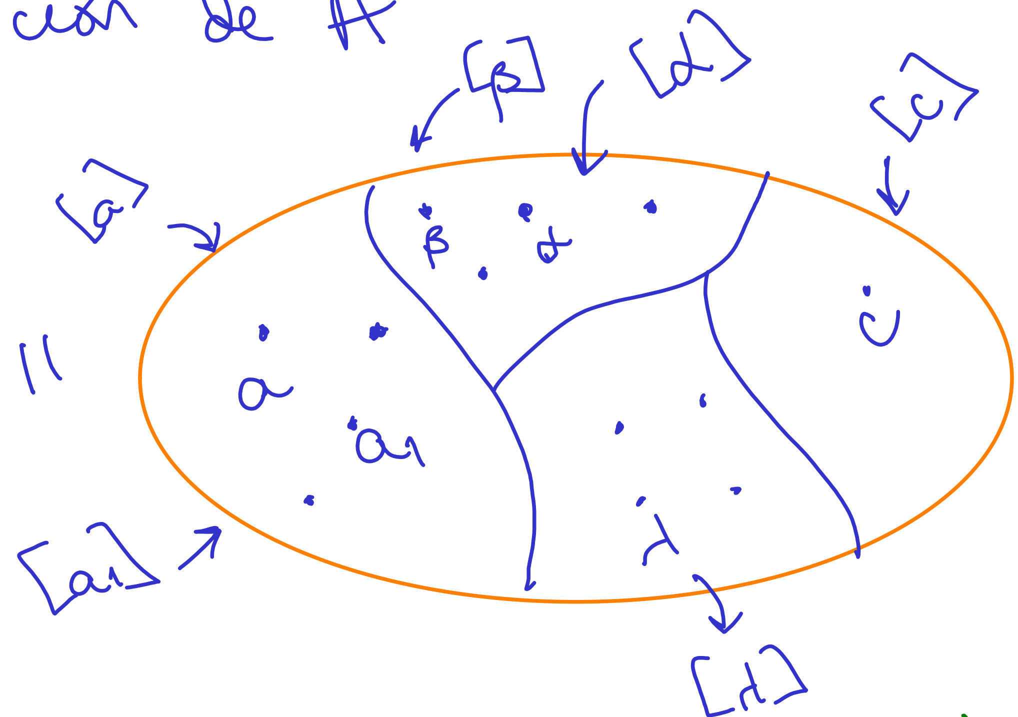
$\therefore A = \bigcup_{a \in A} [a]$. $\square$

Corolario: Si A es un conjunto y R es una rel. de equiv. sobre A, entonces el conjunto cociente

$A/_R = \{ [a] : a \in A \}$ es una partición del conjunto A.

Dems: Por el Teo. anterior, A/R satisface las conds. (I), (II) y (III) de la def. de partición de A.

$\therefore$ A/R es una partición de A

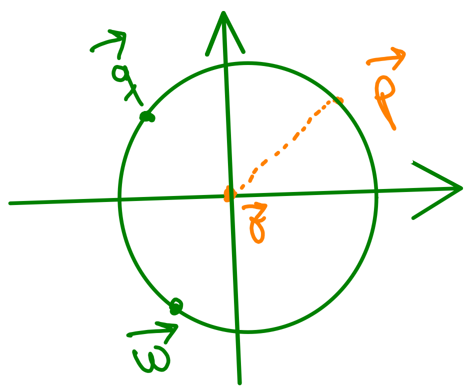


Ejemplo: Sea $A = \mathbb{R}^2$ (A es el plano cartesiano).

Definimos una rel. de equiv. sobre A como sigue:

$\vec{p} \, R \, \vec{q}$ sii la distancia de $\vec{p}$ al $\vec{0}$ es igual que la dist. de $\vec{q}$ al $\vec{0}$.

sii $\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\|$.



Si $\vec{p}$ y $\vec{q}$ viven en una misma circunferencia centrada en el origen, entonces $\vec{p}\,R\,\vec{q}$.

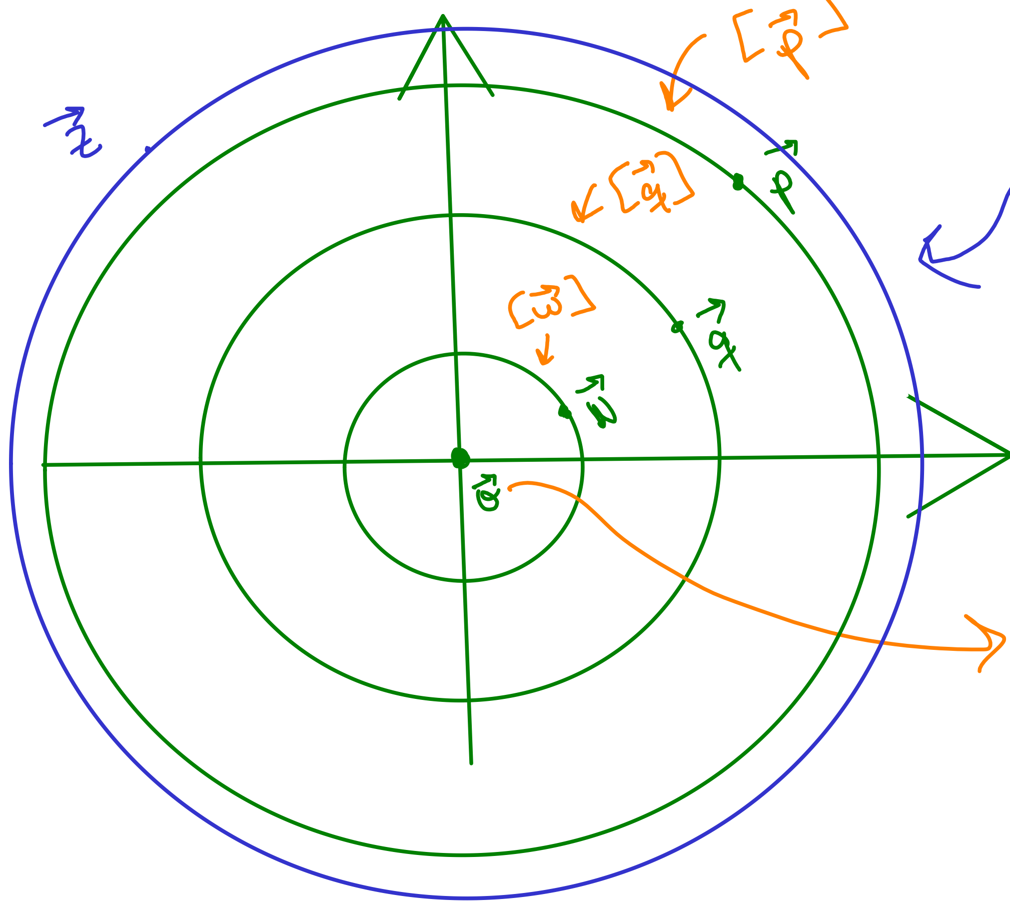
La próx. vez veremos que R realmente es rel. de equiv.

$[\vec{p}] = \{\vec{q} : \vec{q}\,R\,\vec{p}\}$ = La circunferencia con radio $\|\vec{p}\|$ y centrada en el origen.

Cada clase de equiv es una circunferencia centrada en el origen.

A/R es una partición por el corolario anterior.

Los elementos de esta partición son todas las circunferencias centradas en el origen.



$[\vec{z}] \in A/R$

$[\vec{0}] = \{\vec{0}\}$.

$\vec{p} \in A, \quad \vec{p} \in [\vec{p}] \subseteq A, \quad \vec{p} \in [\vec{p}] \in A/R$

$(\vec{p}, \vec{p}) \in R.$