Si R es una rel. de equiv. sobre A, ent.

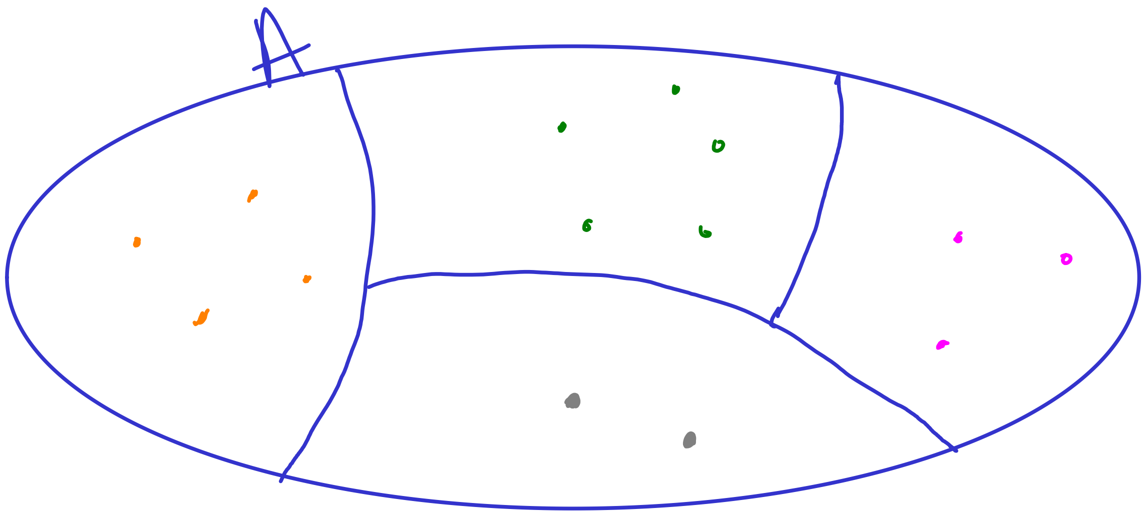
A/R es una partición (clase pasada).

Proposición: Si A es un conjunto con $A \neq \emptyset$ y si $\mathcal{P}$ es una partición de A, entonces la relación dada por

$x R y$ si y sólo si x y y pertenecen al mismo elemento de la partición $\mathcal{P}$,

entonces R es una relación de equivalencia y

$$A/R = \mathcal{P}.$$



$A/_R = \{[a] : a \in A\}.$

<u>Ejemplo:</u> Sea $A = \{2, 3, 6, 9, 10\}$ y

sea $\wp = \{\{2,6,10\}, \{3\}, \{9\}\}.$

Ent. $\wp$ es una partición de A pues:

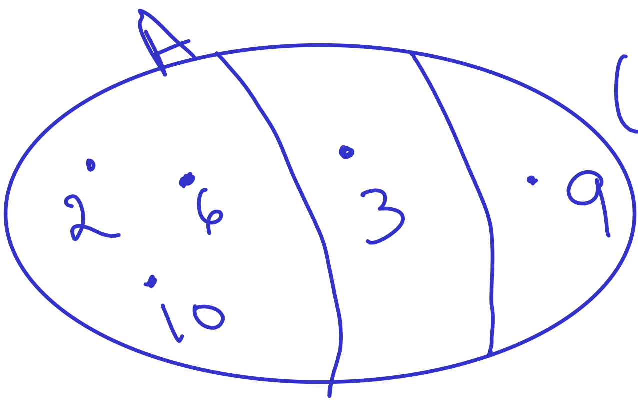
(i) $\{2,6,10\} \neq \emptyset$, $\{3\} \neq \emptyset$, $\{9\} \neq \emptyset$

(ii) $\{2,6,10\} \cap \{3\} = \emptyset$; $\{2,6,10\} \cap \{9\} = \emptyset$

$\{3\} \cap \{9\} = \phi$.

(iii) $\{2,6,10\} \cup \{3\} \cup \{9\} = A$.

Sea $R = \{(2,6), (6,2), (2,10), (10,2), (6,10), (10,6), (2,2), (6,6), (10,10), (3,3), (9,9)\}$.



- R es una relación de equivalencia y $A/R = P$.

Dems de la Proposición:

Sea $A \neq \phi$ un conjunto y sea

$\mathcal{P} = \{A_i : i \in I\}$ con I un conjunto de índices.

Sea R la relación sobre A definida de modo

que $(x,y) \in R \iff \exists i \in I (x \in A_i \wedge y \in A_i)$.

Mostraremos que R es una relación de equivalencia sobre A.

(i) PD R es reflexiva sobre A:

Sea $a \in A$. P.D. $(a,a) \in R$.

Como $\mathcal{P}$ es partición, ent. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Luego, como $a \in A$, ent., $\exists i \in I$ $a \in A_i$.

Ent. $\exists i \in I (a \in A_i \wedge a \in A_i)$

(por idempotencia de la conjunción).

$\therefore (a,a) \in R$.

$\therefore$ R es reflexiva sobre A.

(ii) P.D R es simétrica.

P.D: $\forall x,y \in A ((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$.

Sean $x,y \in A$ arbitrarios.

Sup. que $(x,y) \in R$.

Ent. $\exists i \in I (x \in A_i \wedge y \in A_i)$.

Luego, por conmutatividad de la conjunción se sigue que

$$\exists i \in I \, (y \in A_i \wedge x \in A_i).$$

$\therefore (y,x) \in R.$

$\therefore$ R es simétrica.

(iii) P.D. R es transitiva:

P.D. $\forall x,y,z \in A \, (((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow (x,z) \in R).$

Sean $x,y,z \in A.$

Sup. que $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R.$

P.D. $(x,z) \in R.$

Tenemos entonces que:

$$\exists i \in I \, (x \in A_i \wedge y \in A_i) \quad \text{y}$$

$$\exists j \in I \, (y \in A_j \wedge z \in A_j).$$

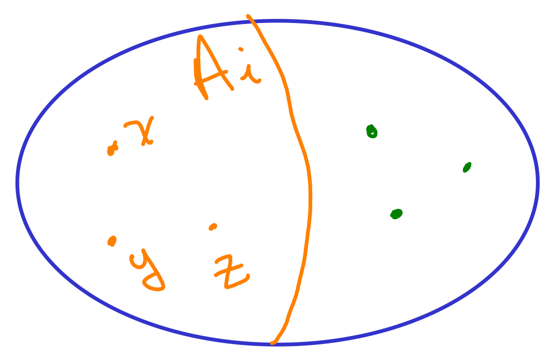
Entonces $y \in A_i \cap A_j$.

Esto significa que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Por contrapositiva de la prop. (ii) de partición, se sigue que $A_i = A_j$ y, por tanto, $i = j$.

Ent.

$$\exists i \in I \, (x \in A_i \wedge z \in A_i).$$



$\therefore (x, z) \in R$.

$\therefore R$ es transitiva

Esto implica que R es de equivalencia sobre A.

Falta ver que $A/_R = \mathcal{P}$ ..... $(*)$

Notemos que:

$$\forall a \in A \quad [a] = \{x \in A : (x,a) \in R\}$$

$$= \{x \in A : \exists i \in I \, (x \in A_i \wedge a \in A_i)\}.$$

Probemos $(*)$ por doble contención:

$\subseteq$ Sea $[a] \in A/_R$.

Tomemos $a \in A$ un rep. de la clase $[a]$.

Como $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, ent. $\exists i \in I$ t.q.

$\boxed{a \in A_i}$, pues $\mathcal{P}$ es partición.

Ent. $[a] = \{x \in A : \exists i \in I (x \in A_i \wedge a \in A_i)\}$

$= A_i$

Ent. $[a] \in \mathcal{P}$.

$\supseteq$) Sea $A_i \in \mathcal{P}$.

PD $A_i \in A/R$.

Como $\mathcal{P}$ es partición de A, ent. $A_i \neq \emptyset$.

Ent $\exists a \in A_i$.

Afirmamos que $A_i = [a]$.

Recordemos que:

$$[a] = \{x \in A : \exists i \in I (x \in A_i \wedge a \in A_i)\}.$$

$$= A_i.$$

Ent. $A_i \in A/R$.

$$\therefore \mathcal{P} = A/R.$$

$\square$