Definición: Si $f: A \to B$ es una función de A en B, decimos que f es inyectiva sii

$$\forall x_1 \in A \, \forall x_2 \in A \, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \quad \text{sii}$$

$$\forall x_1 \in A \, \forall x_2 \in A \, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Definición: Si $f: A \to B$ es una función de A en B, decimos que f es sobreyectiva o suprayectiva o sobre B si y sólo si

$$\forall y \, (y \in B \Rightarrow \exists x \in A \, (f(x) = y)),$$ que equivale a

$$\forall y \, (y \in B \Rightarrow y \in Im(f)),$$ que es equivalente a

$$B = Im(f).$$

Ejemplo: Sean $A = \{-1, 1, 2, 3\}$

$$B = \{1, 4, 9\}.$$

Sea $f = \{(-1,1), (1,1), (2,4), (3,9)\}$

$$= \{(x,y) \in A \times B : y = x^2\}.$$

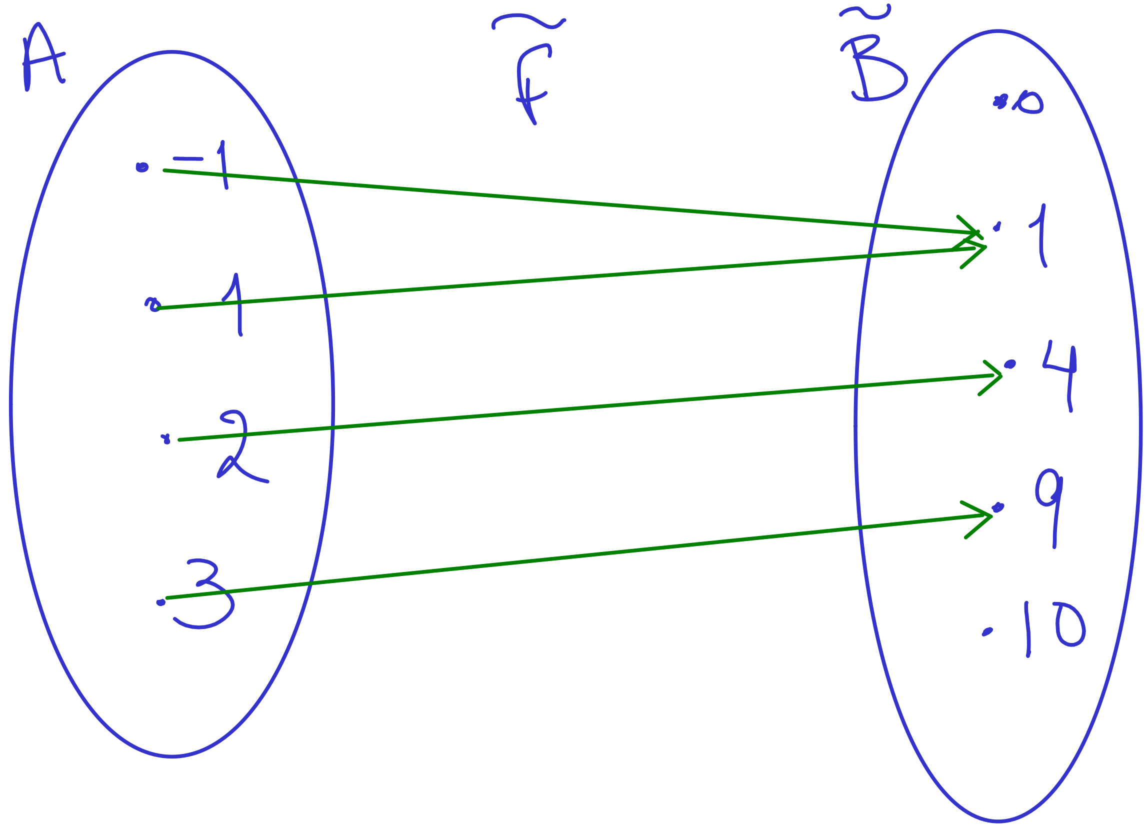
Como $\operatorname{Im}(f) = \{1, 4, 9\} = B$, entonces f es sobreyectiva.

Ej: Sean $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $\tilde{B} = \{0, 1, 4, 9, 10\}$.

y $\tilde{f} = \{(x,y) \in A \times B : y = x^2\} = \{(-1,1), (1,1), (2,4), (3,9)\}$

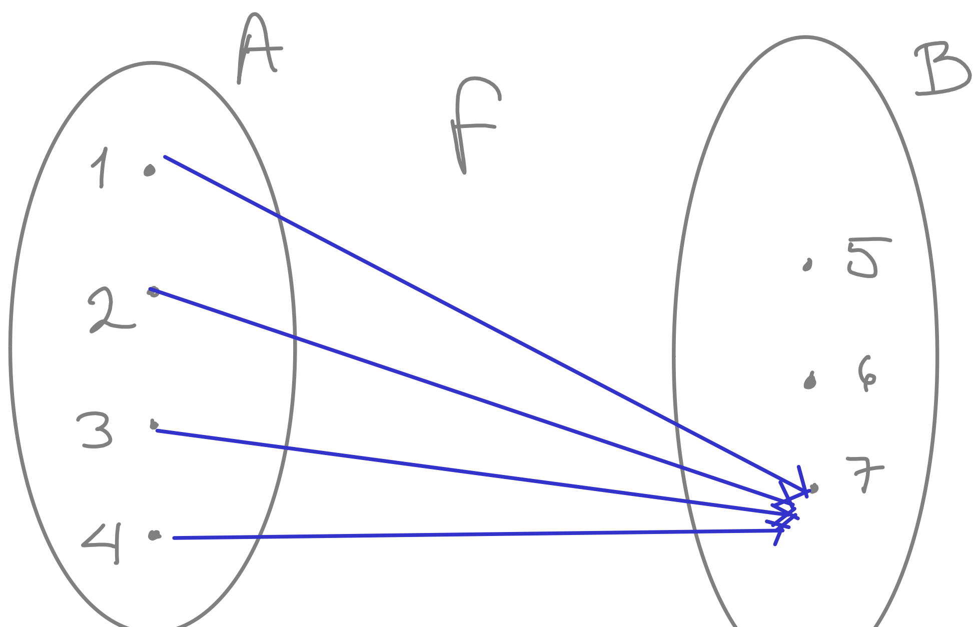
$\boxed{\tilde{f} : A \to B}$, y además $\operatorname{Im}(f) = \{1, 4, 9\} \neq B$

Por tanto, $\boxed{\tilde{f} \text{ no es sobre } \tilde{B}}$

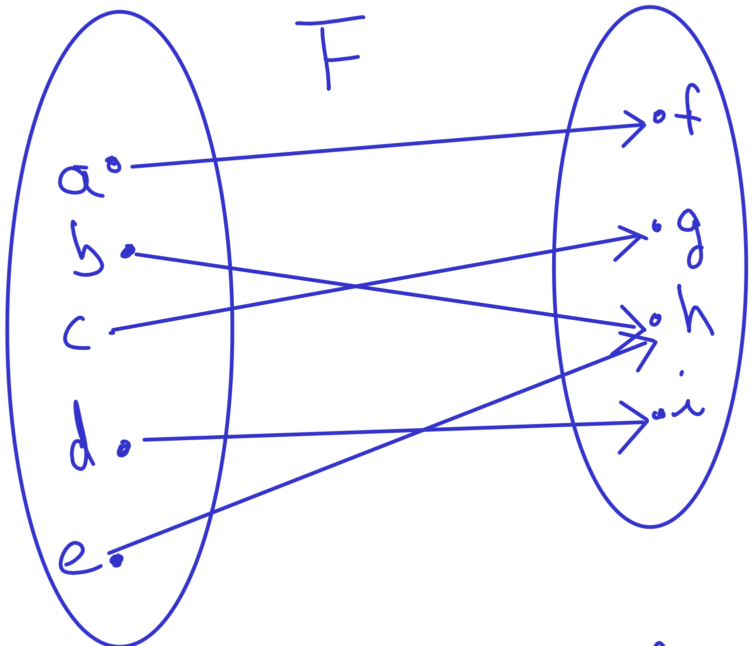


$\tilde{f}$ no es sobre $\tilde{B}$.

Ejemplo



$f: A \to B$ es una función ✓ pero no es sobreyectiva



F es sobreyectiva.

Sin demostración: Si $f: A \to B$ es función, se cumple que:

$$\begin{cases} \text{Si } f \text{ es inyectiva} \Rightarrow \operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B) \\ \text{Si } f \text{ es sobreyectiva} \Rightarrow \operatorname{card}(A) \geq \operatorname{card}(B) \end{cases}$$

Definición: Si $f: A \to B$ es una función de A en B, decimos que f es **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

· Si f es biyectiva también se dice que f es una correspondencia uno a uno o correspondencia biunívoca.

· OJO: Si f es llamada función uno a uno esto significa que f es inyectiva.

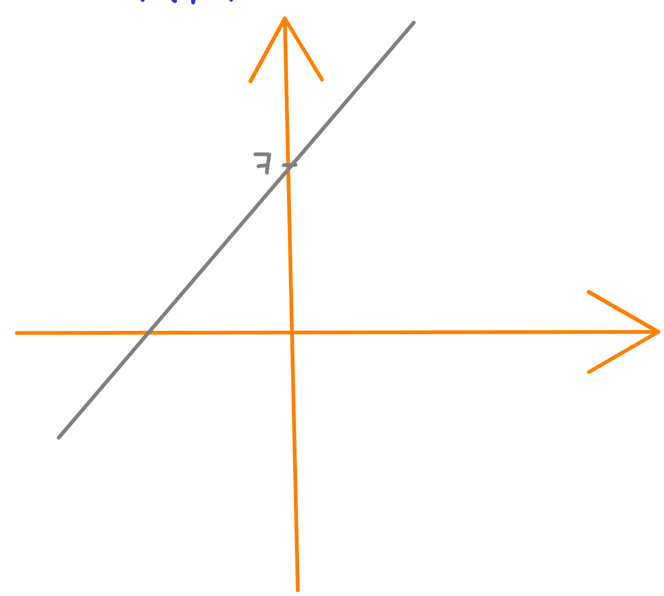
Ejemplos:

① Ayer vimos que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$f(x) = x + 7$ es inyectiva.

¿Es f sobreyectiva?

Sí es sobre $\mathbb{R}$:



P.D: $\forall y (y \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in Im(f))$

PD: $\forall y (y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = y)$.

Sea y arbitrario t.q. $y \in \mathbb{R}$.

PD $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q $f(x) = x+7 = y$

Sea $x := y - 7$.

Ent $x \in \mathbb{R}$ y $f(x) = f(y-7) = (y-7)+7$

$= y$.

$\therefore$ f es sobre $\mathbb{R}$.

$\therefore$ f es biyectiva.

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida como

$$f(m,n) = m+n.$$

(f es la función suma).

$f(2,1) = 2+1=3$ i.e. $((2,1),3) \in f$ En general, $\forall m,n \in \mathbb{N}$ $((m,n), m+n) \in f$.

(1) ¿Es f inyectiva?

f no es inyectiva pues:

$(2,1) \neq (1,2)$ por def. de par ordenado y

$$f(2,1) = 3 = f(1,2).$$

(2) ¿Es f sobreyectiva?

Sí: P.D. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists (m,n) \in \mathbb{N}^2\ f(m,n) = k)$

Sea $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. Ent. $(k,0) \in \mathbb{N}^2$ es tal que $f(k,0) = k+0 = k$.

$\therefore$ f es sobreyectiva.

(3) f no es biyectiva pues no es inyectiva.