Sea $f: A \longrightarrow B$

- Decimos que f es inyectiva sii

$$\forall x \in A \, \forall y \in A \, (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)) \text{ sii}$$

$$\forall x \in A \, \forall y \in A \, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

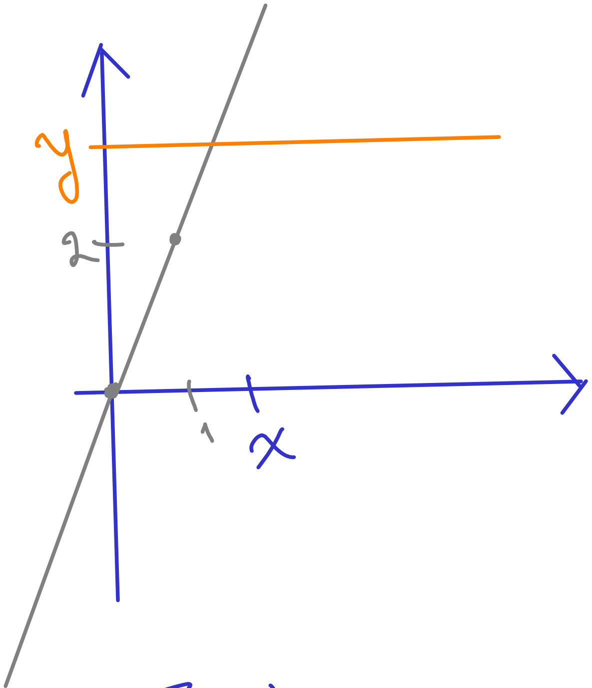
- Decimos que f es sobreyectiva sii

$$\forall y \in B \, \exists x \in A \, (f(x) = y).$$

Ejs

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) := 2x$.

$$x \longmapsto 2x$$



Afirmación:

(1) f es inyectiva.

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t. q. $f(x_1) = f(x_2)$.

Entonces: $2x_1 = 2x_2$. y, multiplicando ambos lados por $\frac{1}{2}$ concluimos que $x_1 = x_2$.

$\therefore$ f es inyectiva.

(2) Afirmación: f es sobreyectiva.

PD $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \ f(x) = y$.

$\boxed{\text{Sea } y \in \mathbb{R}}$. Buscamos x tal que $2x = y$.

$\boxed{\text{Sea } x := \frac{y}{2}.}$ Entonces $f(x) = f\left(\frac{y}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y}{2}$

$= y.$

$\therefore$ f es sobreyectiva.

$\square$

$\therefore$ f es biyectiva.

<u>Ejemplo:</u> Sea $P : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida como $P(n) = 2n$.

$$n \xmapsto{P} 2n.$$

(1) ¿Es P inyectiva?

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ t.q. $P(m) = P(n)$.

Ent. $2m = 2n$ y, por tanto, dividiendo por 2 ambos lados, se tiene que:

$m = n$.

$\therefore$ P es inyectiva.

(2) ¿Es P sobreyectiva?

No es sobreyectiva pues $3 \in \mathbb{N}$ pero $3 \notin Im(P)$ pues $\forall y \in Im(P)$, "y" es par, mientras que 3 es impar.

- Sea $E = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ es par}\}$.

Definamos $\tilde{P} : \mathbb{N} \longrightarrow E$ como $\tilde{P}(n) = 2n$.

Entonces $\tilde{P}$ sí es sobreyectiva.

* Sea $\mathcal{O} = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ es impar}\}$.

$\boxed{\text{“Definimos”}}$ $Q : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{O}$ como $Q(n) = 2n$.

$$Q = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathcal{O} : m = 2n\} = \emptyset.$$

Q no está bien definida como función.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

definida como $f(x) = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$

¿Es f inyectiva?

Sí | Quién sabe | No

1 | 1 |

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ t.q. $f(x_1)=f(x_2)$

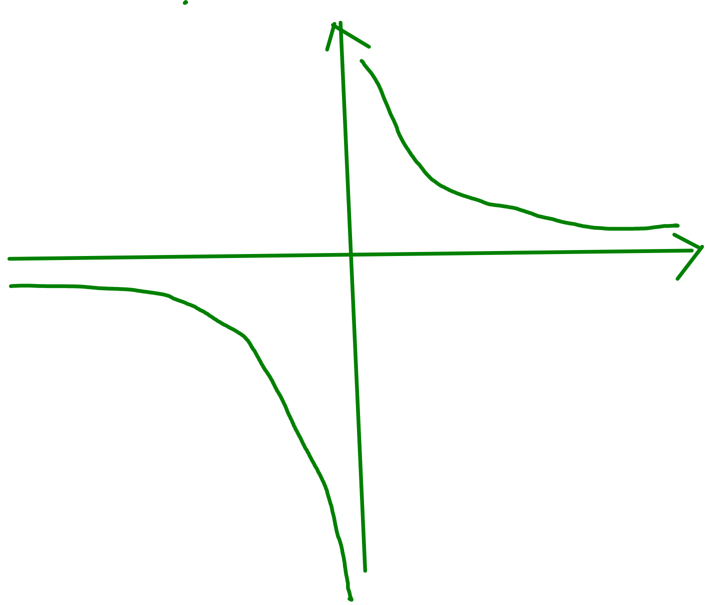
Ent. $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$.

Multiplicando por $x_1 \cdot x_2$ de ambos lados

obtenemos

$$x_2 = x_1.$$

$\therefore$ f es inyectiva.



Af: f no es sobre $\mathbb{R}$.

pues $0 \in \mathbb{R}$ pero

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x} \neq 0$.

Si $\tilde{f} : \underline{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ es t.q. $f(x) = \frac{1}{x}$.

ent $\tilde{f}$ sí es sobreyectiva:

Sea $y \in \underline{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.

(Buscamos $x \in \underline{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ t.q $f(x) = y$, es decir t.q. $\frac{1}{x} = y$.)

Sea $x := \frac{1}{y}$.

Ent. $f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} = y.$

$\square$

Ejemplo:

Sean $A=\{0,1,2\}$ y $B=\{0,1\}$.

Sea $F:\wp(A)\longrightarrow\wp(B)$ definida como

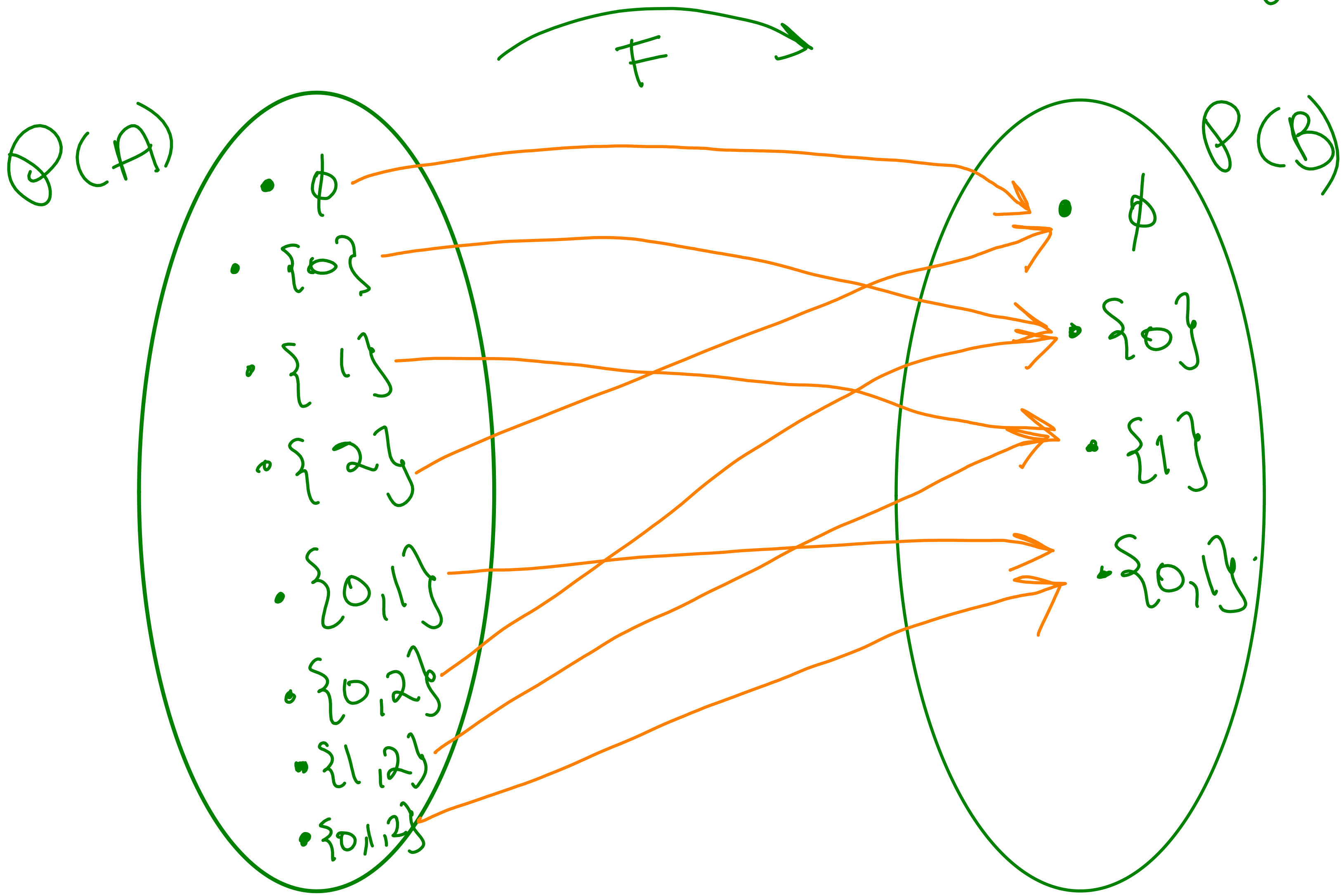
$$F(C):=C\cap B$$

F está bien definida pues si $C\subseteq A$, ent. $C\cap B\subseteq B$.

¿Es F inyectiva?

$A=\{0,1,2\}$.

$B=\{0,1\}$.



¿Es F inyectiva?

No pues $F(\phi)=\phi=F(\{2\})$ pero

$\phi \neq \{2\}$.

¿Es F sobreyectiva pues

$$\forall y \in \wp(B) \ \exists x \in \wp(A) \ F(x) = y.$$

Caso 1: Si $y = \phi$, $F(\phi) = \phi$, con $\phi \in \wp(A)$.

Caso 2: Si $y = \{0\}$, $F(\{0\}) = \{0\}$
con $\{0\} \in \wp(A)$.

Caso 3. Si $y = \{1\}$, $F(\{1\}) = \{1\}$.
con $\{1\} \in \wp(A)$

Caso 4 Si $y = \{0, 1\}$, $F(\{0,1,2\}) = \{0, 1\}$
con $\{0,1,2\} \in \wp(A)$.

$\therefore$ F es sobre $\mathcal{P}(A)$.