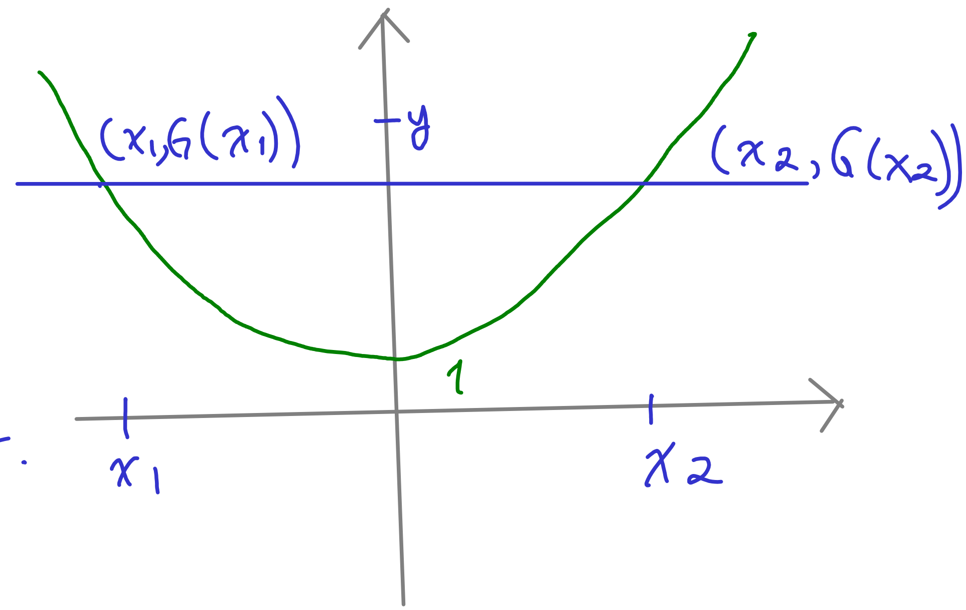
Ejemplo. Sea $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$G(x)=\sqrt{x^2+1}$$

Afirmamos que G no es inyectiva:



Sean $x_1=-1$ y $x_2=1$. Ent.

$$G(x_1)=\sqrt{(-1)^2+1}=\sqrt{2}$$

$$G(x_2)=\sqrt{1^2+1}=\sqrt{2}.$$

Af. que G no es sobreyectiva pues $y=0\in\mathbb{R}$ pero $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+1}\neq y=0$ pues si $x\in\mathbb{R}$ ent. $x^2+1\geq 1$ y, por tanto, $\sqrt{x^2+1}\geq\sqrt{1}=1>0$.

$\therefore \forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) > 0.$

¿Quién es $Im(G)$?

$Im(G) = \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \ G(x) = y \}.$

Af. que $Im(G) = [1, \infty).$

Dems de esta afirmación:

$\subseteq$ Sea $y \in Im(G)$.

PD. $y \in [1, \infty)$.

Como $y \in Im(G)$, ent. $\exists x \in \mathbb{R} \ G(x) = y$,

es decir $\sqrt{x^2+1} = y$.

Como $x \in \mathbb{R}$ ent. $x^2 + 1 \geq 1$, pues $x^2 \geq 0$

y, por tanto $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{1} = 1$.

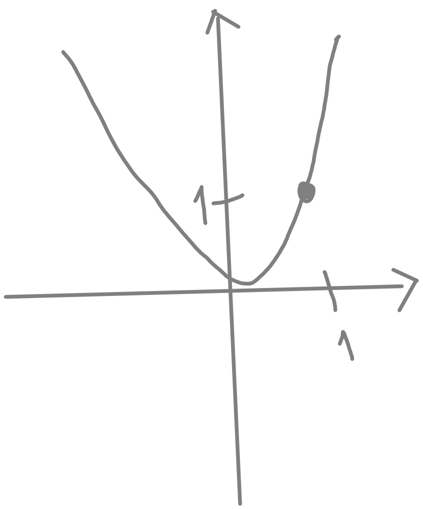
Ent. $y \geq 1$, es decir $y \in [1, \infty)$.

$\supseteq$ Sea $y \in [1, \infty)$

PD $\exists x \in \mathbb{R}$ $G(x) = \sqrt{x^2+1} = y$.

Necesitamos x t.q. $\sqrt{x^2+1} = y$, es decir

$x^2 + 1 = y^2$.



Queremos x t.q. $x^2 = y^2 - 1$

Queremos x t.q. $|x| = \sqrt{y^2 - 1}$.

En limpio: Sea $x := \sqrt{y^2 - 1}$.

Nótese que, como $y \geq 1$, ent $y^2 - 1 \geq 0$, ent.

$\sqrt{y^2 - 1}$ está bien definida.

Entonces

$$G(x) = G\left(\sqrt{y^2-1}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{y^2-1}\right)^2+1}$$

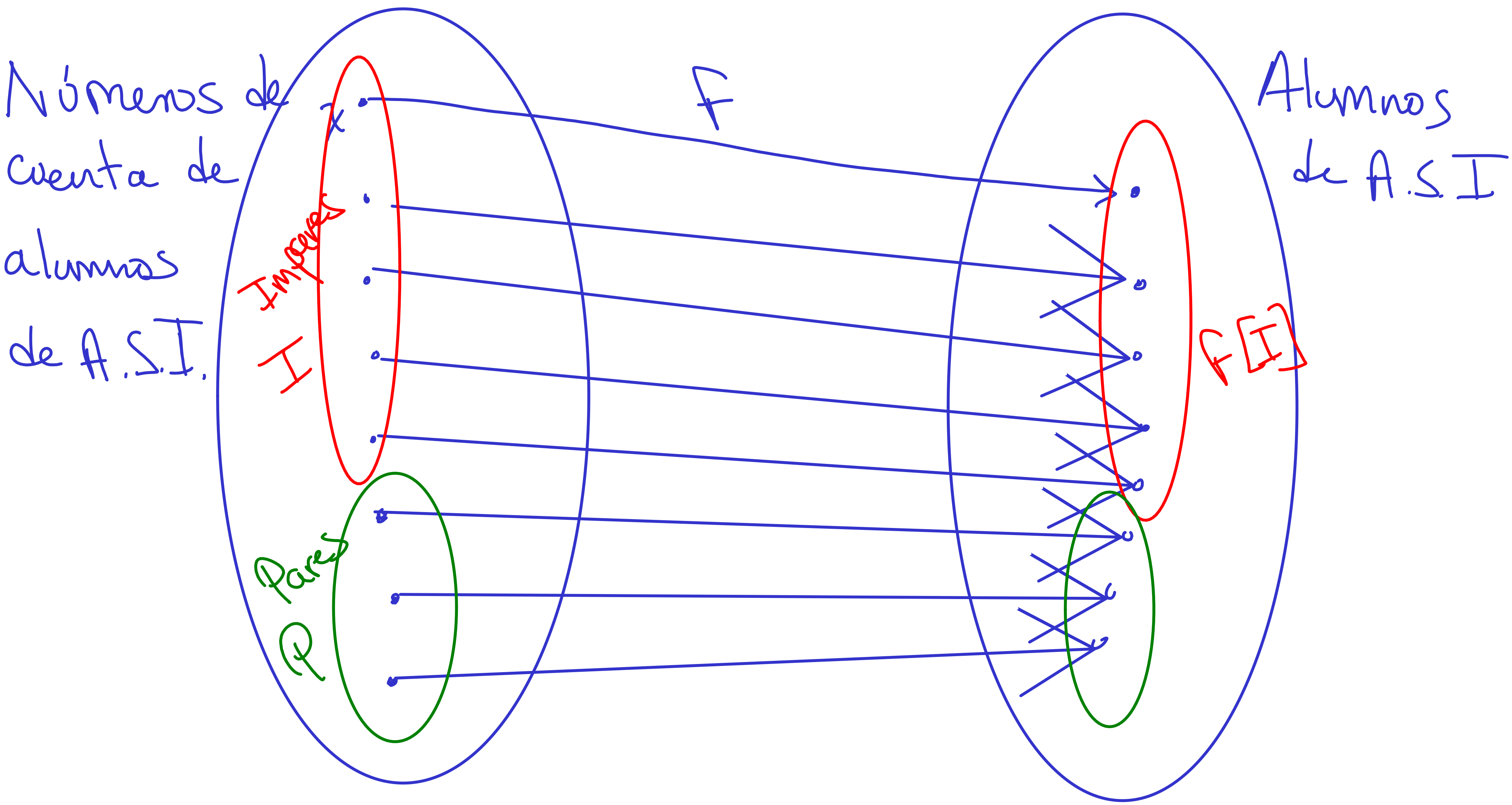
$$= \sqrt{(y^2-1)+1} = \sqrt{y^2} = |y|$$

$= y$ pues, como $y \geq 1$, ent $|y| = y$.

$\square$

Notemos que si definimos $G: \mathbb{R} \to [1,\infty)$ como $G(x) = \sqrt{x^2+1}$, ent G es sobreyectiva.

Imagen directa.



<u>Definición:</u> Sean A y B conjuntos y sea $f: A \to B$ una función. Sea $C \subseteq A$ un subconjunto del dominio de f.

Definimos al $\boxed{\text{conjunto}}$ imagen directa de C bajo f como

$$f[C] := \{ f(x) : x \in C \}.$$

<u>Obs:</u> $f[C] \subseteq B$.

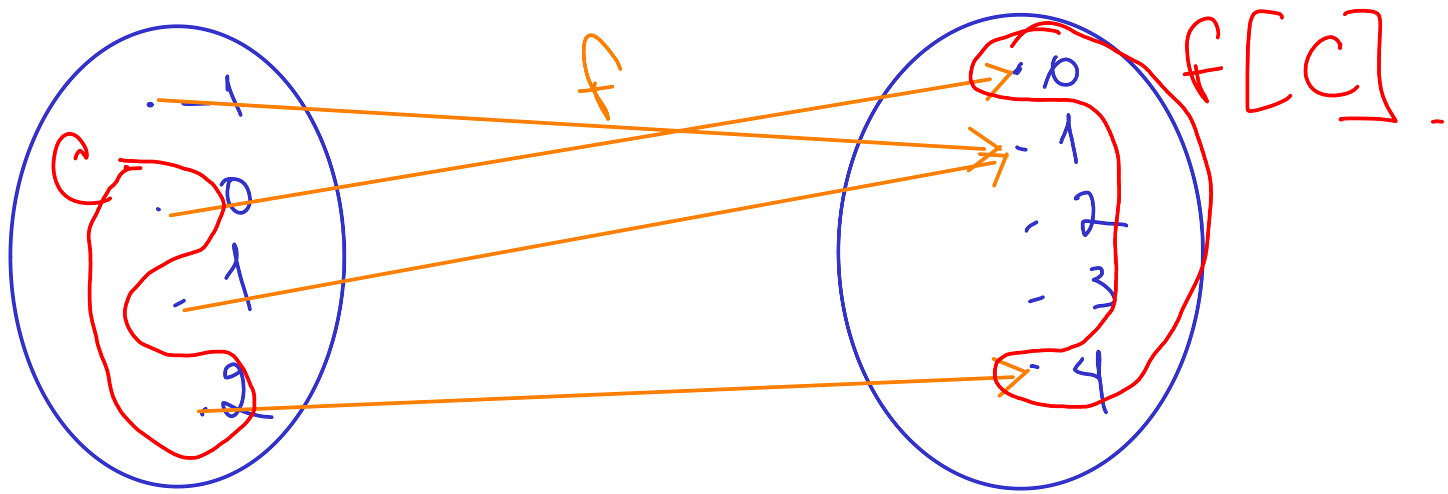
Ejemplo: Sea $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y

sea $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Sea $f = \{(x, y) \in A \times B : y = x^2\}$.

Sea $C = \{0, 2\} \subseteq A$.

Ent. $f[C] = \{0, 4\}$.



Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = 2 \cdot x$$

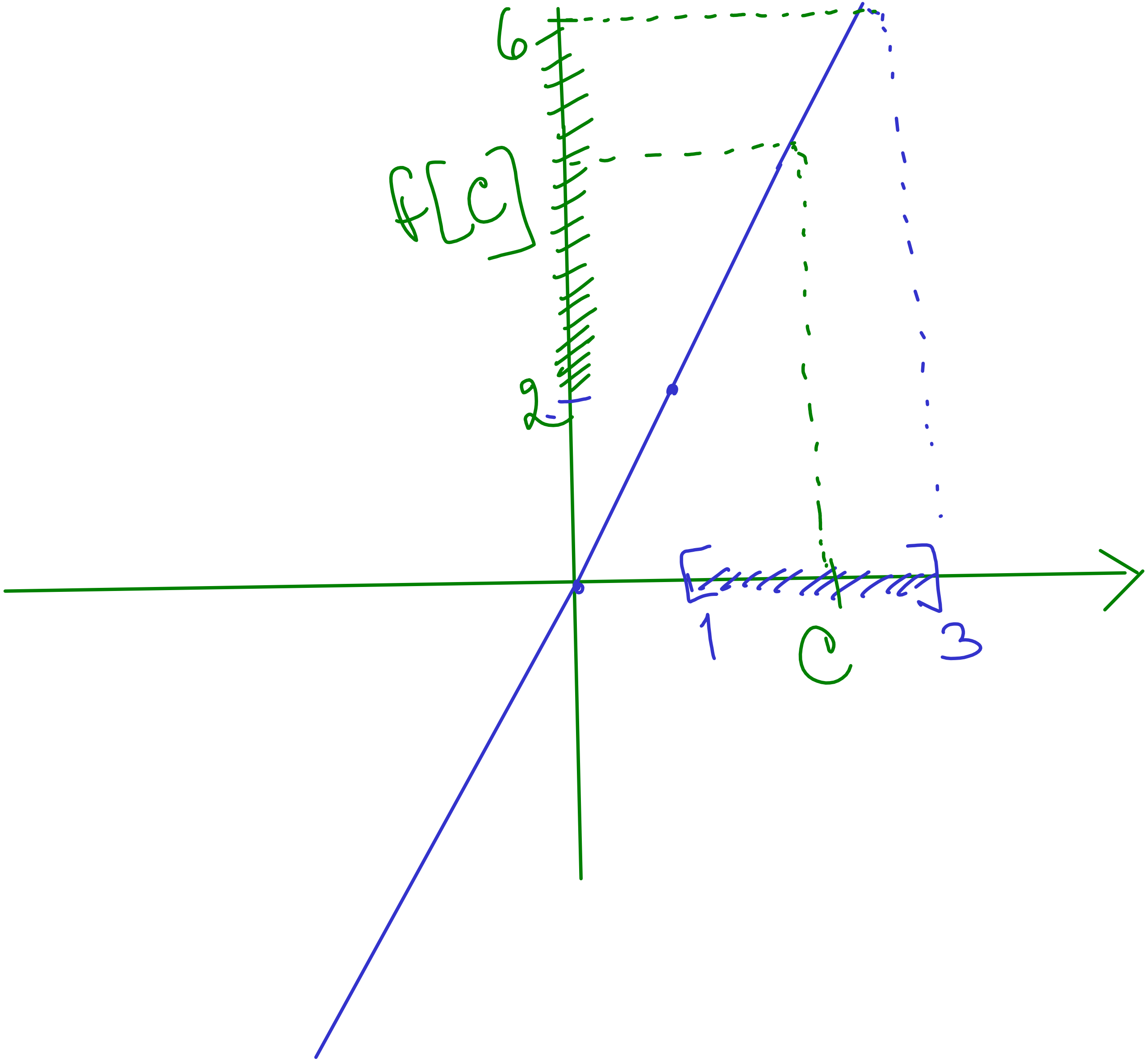
Sea $C := [1, 3]$.

$$f[C] = \{ f(x) : 1 \leq x \leq 3 \}.$$

$$= \{ 2 \cdot x : 1 \leq x \leq 3 \}.$$

$$= \{ y : 2 \leq y \leq 6 \} = [2, 6]$$

$\hookrightarrow$ pues $1 \leq x \leq 3 \iff 2 \leq 2x \leq 6$.



6
f[c]
2
1
c
3