Ejemplo:

Recordamos a $f: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$, con $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 1\}$, definida como

$$f(X) := X \cap B.$$

$\forall X \in \mathcal{P}(A)$

Si $C \subseteq \mathcal{P}(A)$, la imagen directa de C bajo f es el conjunto

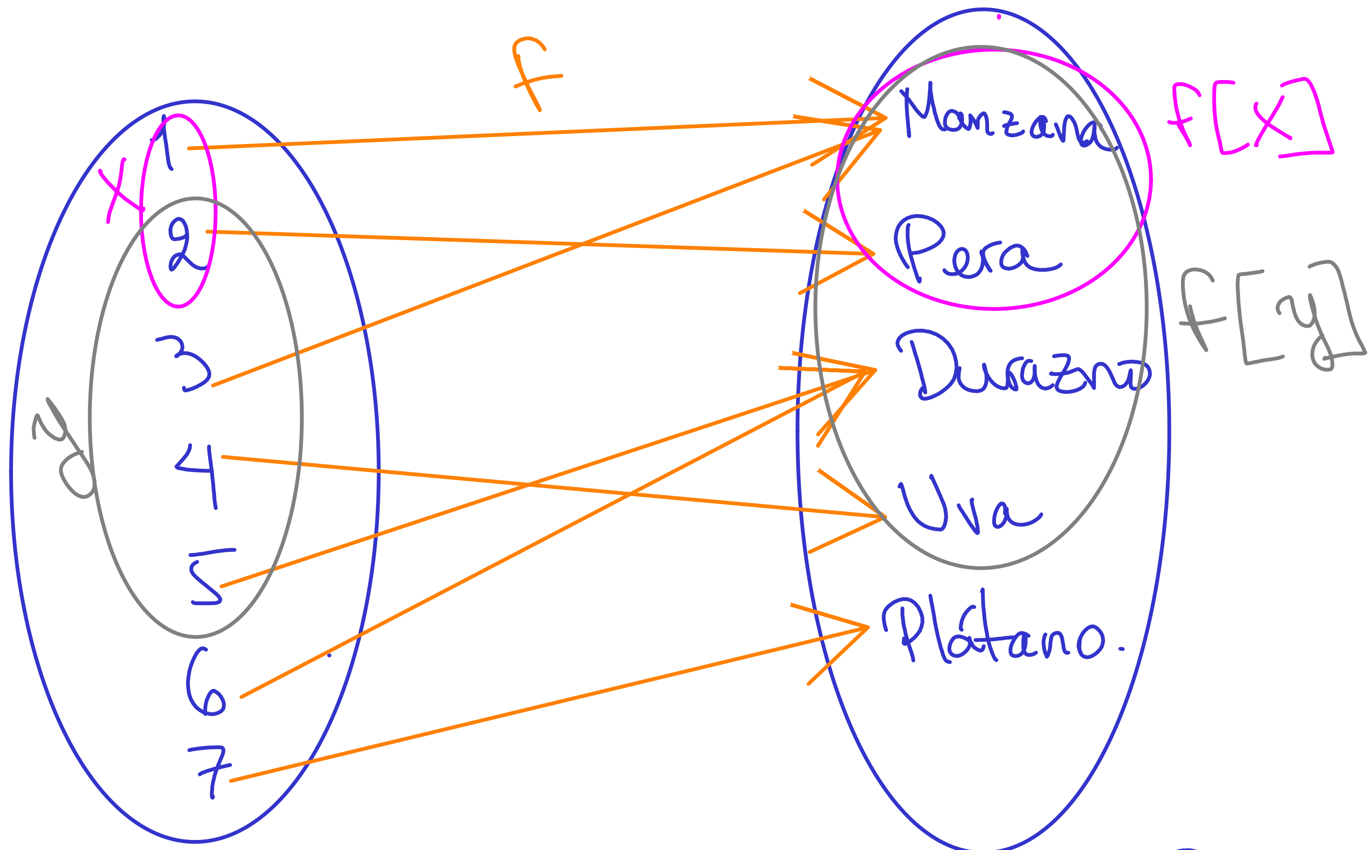
$$f[C] = \{ f(X) : X \in C \}.$$

Con $C := \{ \phi, \{0, 2\}, \{1\} \} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

$$f[C] = \{ f(\phi), f(\{0,2\}), f(\{1\}) \}$$

$$= \{ \underline{\phi}, \underline{\{0\}}, \underline{\{1\}} \}$$

Ejemplo.



$$X \cap Y = \{2\} \; ; \; f[X \cap Y] = \{f(2)\}$$
$$= \{\text{Pera}\}.$$

Por otro lado, $f[X] \cap f[Y] = \{\text{Manzana, Pera}\} \cap \{\text{Manz., Pera, Duraz, Uva}\}$.

$= \{\text{Manzana}, \text{Pera}\}.$

<u>Proposición:</u> Sean A y B conjuntos cualesquiera y sea $f: A \to B$ una función:

(i) $f[\phi] = \phi$.

(ii) Si X y Y son subconjuntos de A, ent.

$$f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y].$$

(iii) Si X y Y son subcjtos de A, ent.

$$f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y].$$

<u>Dem:</u> (i) $f[\phi]=\{f(x) : x\in\phi\}=\phi$

pues $\forall x\,(x\notin\phi)$

(ii) Sean $X, Y\subseteq A$.

P.D $f[X\cap Y]\subseteq f[X]\cap f[Y]$.

Sea $z\in f[X\cap Y]$. Entonces

$\exists w\in X\cap Y$ t.q. $f(w)=z$.

Como $w\in X\cap Y$, ent. $w\in X$ y $w\in Y$.

Por tanto, $f(w)\in f[X]$ y $f(w)\in f[Y]$,

es decir, $z\in f[X]$ y $z\in f[Y]$.

$\therefore\ z \in f[X] \cap f[Y]$.

(iii) Sean $X, Y \subseteq A$.

PD $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $z \in f[X \cup Y]$.

Ent. $\exists w \in X \cup Y$ t.q. $f(w) = z$.

Como $w \in X \cup Y$, $w \in X$ ó $w \in Y$.

Entonces, $f(w) \in f[X]$ ó $f(w) \in f[Y]$,

de modo que $z \in f[X]$ ó $z \in f[Y]$.

Por tanto, $z \in f[X] \cup f[Y]$.

$\supseteq$] Sea $z \in f[X] \cup f[Y]$.

Entonces $z \in f[X]$ ó $z \in f[Y]$.

Por lo tanto,

$(\exists w \in X\, (f(w)=z))$ ó $(\exists w \in Y\, (f(w)=z))$.

Caso 1. Si $\exists w \in X$ t.q. $f(w)=z$, ent, como $X \subseteq X \cup Y$, esto implica que $\exists w \in X \cup Y$ t.q. $f(w)=z$.

Por tanto, $z \in f[X \cup Y]$.

Caso 2: Si $\exists w \in Y$ t.q $f(w)=z$, es análogo concluir que $z \in f[X \cup Y]$.

Entonces $z \in f[X \cup Y]$. $\square$

<u>Teorema:</u> Sea $f: A \longrightarrow B$ una función.
Entonces, f es inyectiva si y sólo si
$$\forall X \subseteq A \ \forall Y \subseteq A \quad f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y].$$

<u>Dem:</u>

$\Rightarrow$] Supongamos que f es inyectiva.

P.D: $\forall X \subseteq A \ \forall Y \subseteq A \ f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

Sean $X, Y \subseteq A$ subconjuntos arbitrarios.
Como f es función, por el inciso (ii) de la Prop.

tenemos que

$$f[X\cap Y]\subseteq f[X]\cap f[Y].$$

Resta probar la otra contención:

P.D. $f[X]\cap f[Y]\subseteq f[X\cap Y]$.

Sea $z\in f[X]\cap f[Y]$.

Como $z\in f[X]$, ent $\exists w\in X$ t.q. $f(w)=z$.

Como $z\in f[Y]$, ent. $\exists \tilde{w}\in Y$ t.q. $f(\tilde{w})=z$.

Ent. $f(w)=z=f(\tilde{w})$ y, como f es inyectiva,

entonces $w=\tilde{w}$.

Como $w \in X$ y $\tilde{w} \in Y$, esto significa que

$$w = \tilde{w} \in X \cap Y.$$

Finalmente, como $z = f(w) = f(\tilde{w})$, ent.

$$z \in f[X \cap Y].$$

$\Leftarrow]$ Sup. que $\forall X, Y \subseteq A$ $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

P.D f es inyectiva.

P.D. $\forall w, \tilde{w} \in A \left(f(w) = f(\tilde{w}) \Rightarrow w = \tilde{w} \right)$.

Sean $w, \tilde{w} \in A$ arbitrarios.

Sup que $f(w) = f(\tilde{w})$.

Definimos a los conjuntos:

$$X := \{w\} \text{ y } Y := \{\tilde{w}\}.$$

Ent. $X \cap Y = \{w\} \cap \{\tilde{w}\}$.

Por hipótesis sabemos que

$$f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y].$$

Luego

$$f[X \cap Y] = f[\{w\} \cap \{\tilde{w}\}]. \text{ y}$$

$$f[X] \cap f[Y] = \{f(w)\} \cap \{f(\tilde{w})\}$$
$$= \{f(w)\}.$$

Entonces: $f[\{w\} \cap \{\tilde{w}\}] = \{f(w)\} \neq \phi$.

Entonces, por la Prop. (i), $\{w\} \cap \{\tilde{w}\} \neq \phi$.

Entonces, necesariamente $w = \tilde{w}$.

$\therefore$ f es inyectiva. $\square$