<u>Teorema:</u> Sea $f : A \to B$. Entonces:

(i) f es inyectiva si y sólo si

$$\forall X \subseteq A \quad X = f^{-1}[f[X]].$$

(ii) f es sobreyectiva si y sólo si

$$\forall Y \subseteq B \quad Y = f[f^{-1}[Y]].$$

(iii) f es biyectiva si y sólo si

$$\forall X \subseteq A \quad B \setminus f[X] = f[A \setminus X].$$

<u>Dems:</u> $\boxed{\Rightarrow}$ Sup. que f es biyectiva.

P.D. $\forall X \subseteq A \quad B \setminus f[X] = f[A \setminus X]$.

Sea $X \subseteq A$ arbitrario

$\boxed{\subseteq}$ Sea $y \in B \setminus f[X]$.

P.D. $y \in f[A \setminus X]$.

Como $y \in B$ y f es sobreyectiva, ent.

$\underline{\exists x \in A}$ t.q. $f(x) = y$.

Veamos que $x \in A \setminus X$.

Si $x \in X$, entonces $f(x) \in f[X]$.

Como $y = f(x) \notin f[X]$, ent $x \notin X$.

Por tanto, $x \in A \setminus X$.

Ent. $y = f(x) \in f[A \setminus X]$.

$\supseteq$] Sea $y \in f[A \setminus X]$.

P.D $y \in B \setminus f[X]$.

Como $y \in f[A \setminus X]$, ent $\exists x \in A \setminus X$,

t.q $f(x) = y$.

Como $f : A \to B$ y $y = f(x)$, ent $y \in B$.

Como f es inyectiva, $\forall z \in X$ se tiene

que $f(z) \neq f(x)$, pues si $z \in X$ ent $z \neq x$.

pues $x \notin X$.

Esto implica que $y = f(x) \notin f[X]$.

Entonces $y \in B \setminus f[X]$.

$\Leftarrow$] Sup. que $\forall X \subseteq A$ $B \setminus f[X] = f[A \setminus X]$

PD f es biyectiva.

(I) P.D f es inyectiva.

P.D. $\forall a_1, a_2 \in A \left(a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \right)$.

Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \neq a_2$.

Sea $X := \{a_1\}$.

Obs. que $a_2 \notin X$

Nótese también que $f[X] = \{f(a_1)\}$.

Por hipótesis sabemos que

$$B \setminus f[X] = f[A \setminus X] \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

Luego, como $a_2 \notin X$, ent $a_2 \in A \setminus X$ y

$$f(a_2) \in f[A \setminus X].$$

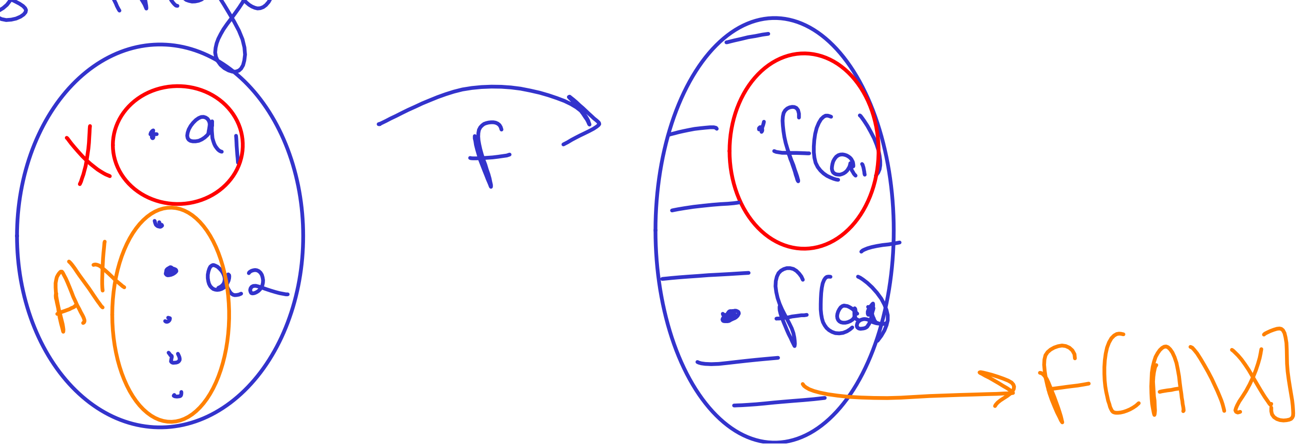
Ent, por (*) se tiene que $f(a_2) \in B \setminus f[X]$

$= B \setminus \{f(a_1)\}$.

Ent $f(a_2) \in B$ y $f(a_2) \notin \{f(a_1)\}$.

Por tanto, $f(a_2) \neq f(a_1)$.

$\therefore$ f es inyectiva.



(II) P.D f es sobreyectiva. P.D. $f[A]=B$.

P.D $\forall y\in B\ \exists x\in A\ f(x)=y$.

Sea $y\in B$ arbitrario.

Sea $X=A$. Por hipótesis

$$B\setminus f[A]=f[A\setminus A]=f[\phi]=\phi.$$

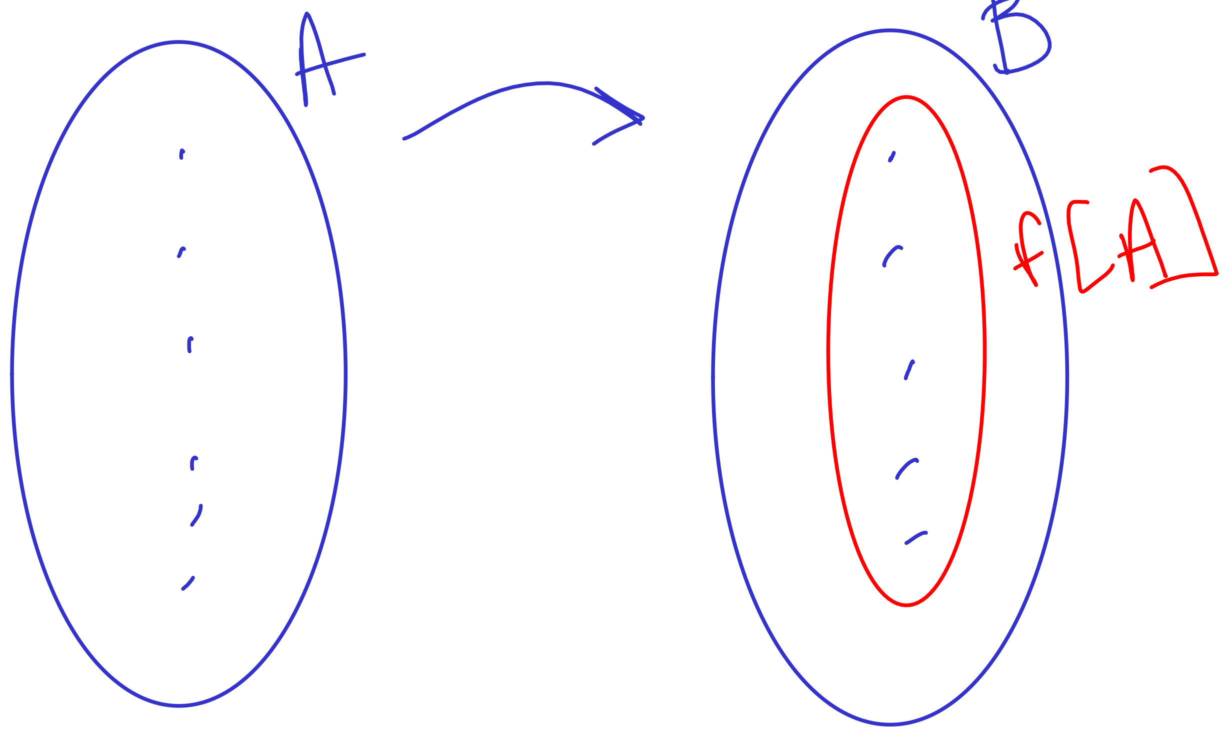
Como $f[A]\subseteq B$, entonces $B=f[A]$

pues de lo contrario, existiría

$$z\in B\setminus f[A]=\phi \ !$$

Ent f es sobreyectiva y $\forall y\in B\ \exists x\in A$ t.q

$f(x) = y$.



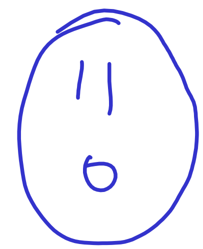
$\therefore$ f es biyectiva. $\square$

<u>Ejemplo:</u> Si $A=\{1,2\}$, $\underline{B=\{1,2\}}$ y $\tilde{B}=\{1,2,3\}$, ent. $f=\{(1,1),(2,2)\}$ es una función de A en B.

y $g = \{(1,1),(2,2)\}$ es una función de A en $\tilde{B}$.

Obs. f es sobreyectiva pero g no lo es.

Obs: como conjuntos $f = g$.



Definición: Dados conjuntos A, A', B y B' y funciones $f: A \longrightarrow B$ y $g: A' \longrightarrow B'$, decimos que f es igual a g si y sólo si:

(1) $A = A'$

(2) $B = B'$

(3) $\forall x \in A \, (f(x) = g(x))$.

De la prop. de clase de ayer

P.D. Si $f: A \longrightarrow B$, ent

$$\forall X \subseteq A \left(X \subseteq f^{-1}[f[X]] \right).$$

Sea $X \subseteq A$ arbitrario.

P.D. $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$.

Sea $x \in X$

PD $x \in f^{-1}[f[X]]$.

PD $x \in \{z \in A : f(z) \in f[X]\}$

Como $x \in X$, ent $f(x) \in f[X]$

Además, como $X \subseteq A$, ent $x \in A$.

Por tanto $x \in f^{-1}[f[X]]$.