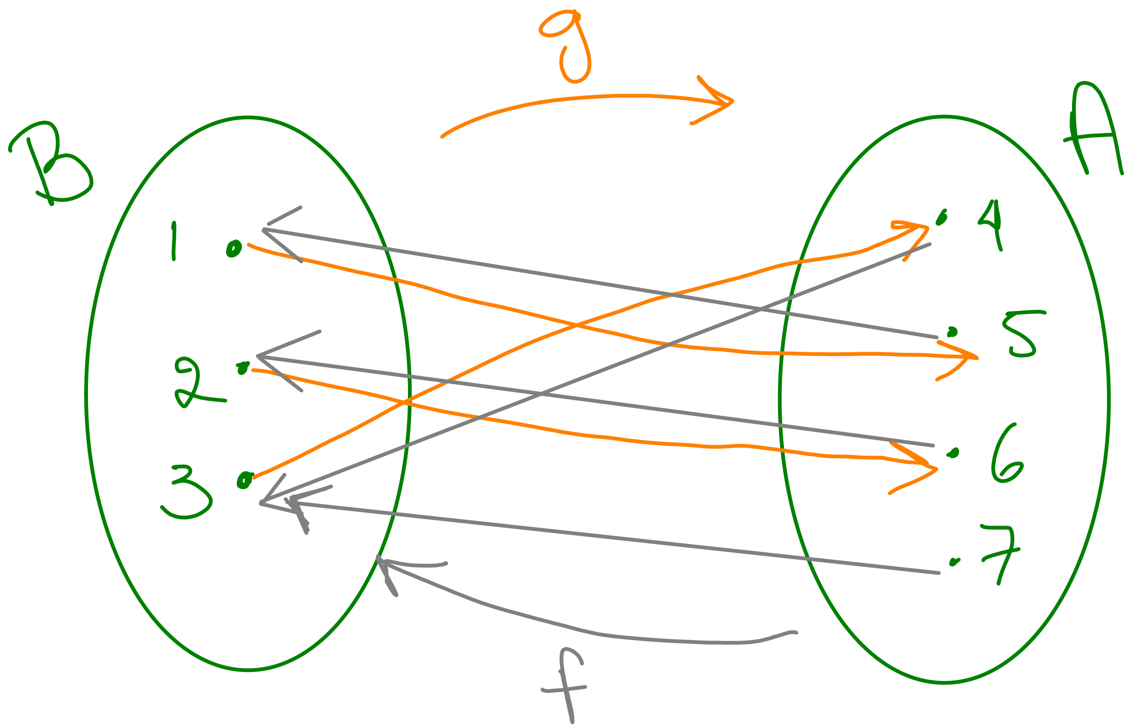
Definición: Sean $f : A \to B$ y
$g : B \to A$.

Decimos que $\boxed{f \text{ es una inversa izquierda de } g}$ si y sólo si

$$f \circ g = Id_B$$

Decimos que $\boxed{f \text{ es una inversa derecha de } g}$ si y sólo si

$$g \circ f = Id_A.$$



g es inyectiva.

Nótese que $f \circ g : B \longrightarrow B$. y

$\forall b \in B \quad f \circ g(b) = b = Id_B$.

Ent f es una <u>inversa izquierda</u> de g.

Proposición: Sea $g: X \longrightarrow Y$ con X y Y conjuntos cualesquiera no vacíos. Entonces g es inyectiva si y sólo si g tiene una inversa izquierda.

Dem: $\Rightarrow$] Sup. que g es inyectiva.

P.D. g tiene inversa izquierda.

Sea $x_0 \in X$ fijo.

Definamos $f: Y \longrightarrow X$ como:

$$f(y) = \begin{cases} \overline{x} & \text{si } y \in g[X] \text{ y } y = g(\overline{x}) \\ x_0 & \text{si } y \in \mathcal{Y} \setminus g[X]. \end{cases}$$

Afirmamos que f está bien definida.

En efecto, como g es inyectiva, entonces $\forall y_1, y_2 \in g[X]$, si $y_1 = y_2$ y $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ent. $x_1 = x_2$.

Ent. f es función y $f: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$.

Nótese que $f \circ g: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ y, si $x \in X$ es arbitrario, ent.

$$f(g(x)) = x = Id_X(x)$$

$\therefore$ f es inversa izq. de g.

$\Leftarrow]$ Sea $g: X \longrightarrow Y$ t.q

$\exists f: Y \longrightarrow X$ con la prop. de que

$$f \circ g = Id_X.$$

P.D. g es inyectiva.

P.D. $\forall x_1, x_2 \in X \; (g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Sean $x_1, x_2 \in X$ arbitrarios tales que $g(x_1) = g(x_2)$

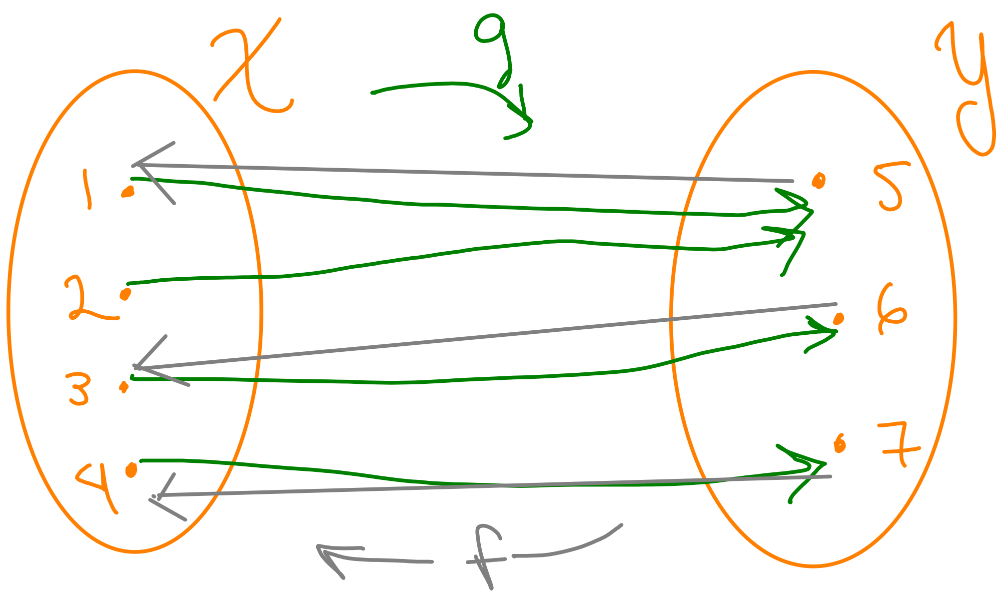
Entonces, como f es función, se sigue que

$$x_1 = f \circ g(x_1) := f(g(x_1)) = f(g(x_2)) =: f \circ g(x_2)$$

$$= x_2$$

por hip de f inv. izq de g

Ent. $x_1 = x_2$. $\square$



g es sobre Y.

$g \circ f = Id_Y$.

Proposición: Sea $g: X \longrightarrow Y$ una función con X y Y cjtos no vacíos. Entonces g es sobreyectiva si y sólo si g tiene alguna inversa derecha.

$\Rightarrow]$ Sea $g: X \longrightarrow Y$ sobreyectiva.

PD g tiene alguna inversa derecha.

Sea $f: Y \longrightarrow X$ definida como

$f(y) := x_y$ p.a. $x_y \in \{x \in X : g(x) = y\}$

que elegimos aleatoriamente.

Obs: f está bien definida pues

$\forall y \in Y$, como g es sobre, ent $\exists x_y$ t.q.

$g(x_y) = y$ y estamos eligiendo un

único x_y para cada y.

Nótese que $g \circ f : Y \longrightarrow Y$. y

$\forall y \in Y$,

$$g(f(y)) = g(x_y) = y = Id_Y(y).$$

$\hookrightarrow$ por def. de x_y.

$\therefore\ g \circ f = Id_Y$.

Ent. f es inversa derecha de g.

$\Leftarrow$ Sup. que g tiene alguna inversa derecha $f: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ t.q. $g \circ f = Id_{\mathcal{Y}}$.

PD g es sobreyectiva.

PD $\forall y \in \mathcal{Y} \; \exists x \in \mathcal{X} \; g(x) = y$.

Sea $y \in \mathcal{Y}$ arbitraria. Entonces, por hip

$$g \circ f(y) = g(f(y)) = Id_{\mathcal{Y}}(y) = y$$

Sea $x := f(y)$. Ent $g(x) = y$.

$\therefore$ g es sobreyectiva. $\square$