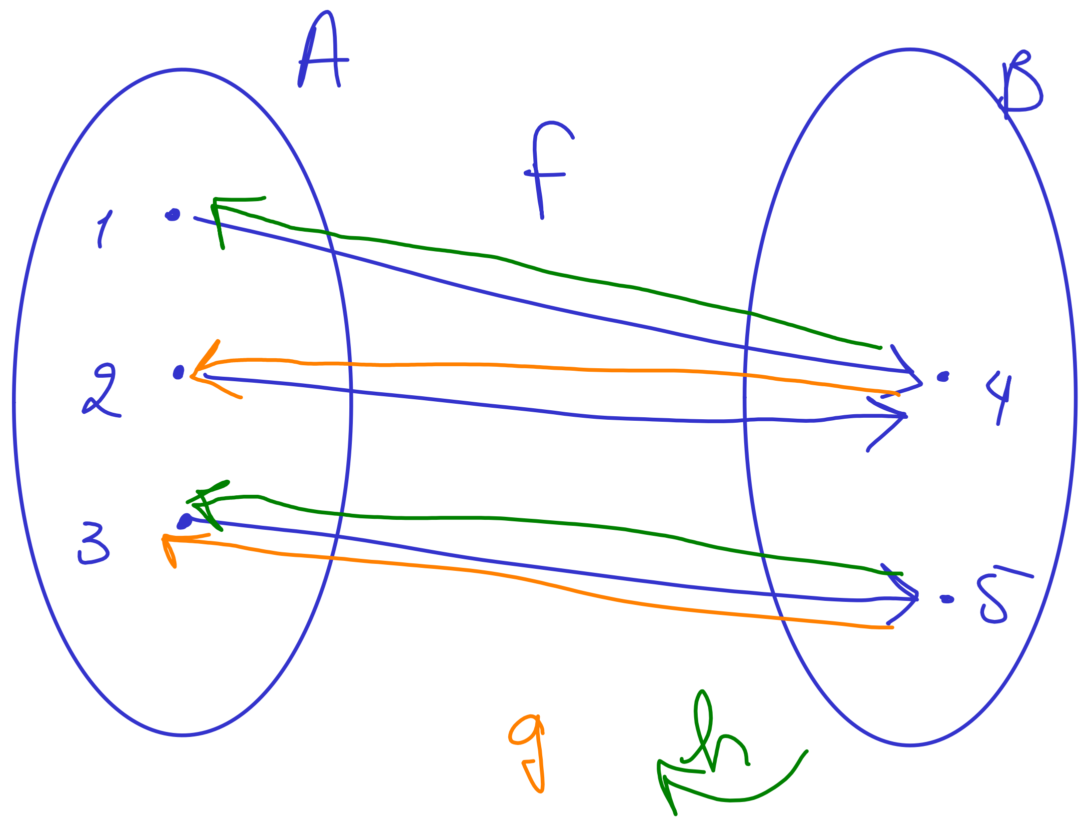
Ejemplo:

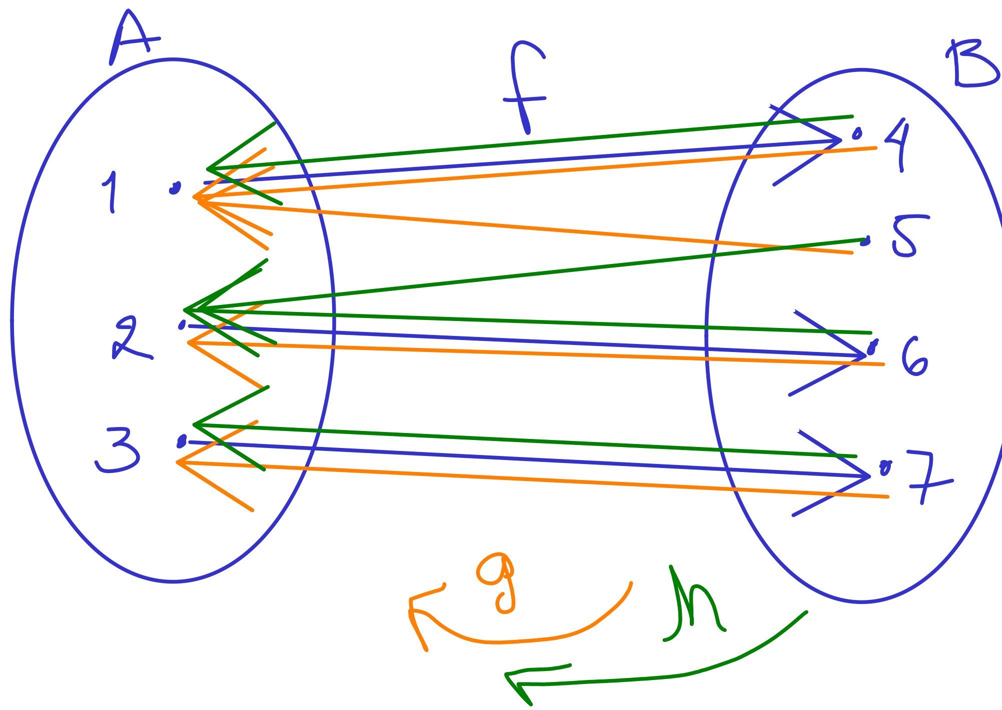


f no es inyectiva pero sí es sobre.

$f \circ g = Id_B$.

$f \circ h = Id_B$.

Nótese que $g \neq h$. pues $g(4) = 2$, $h(4) = 1$.



f es inyectiva pero no es sobreyectiva.

$g \circ f = Id_A$ y $h \circ f = Id_A$.

Además, $g \neq h$ pues $g(5) = 1 \neq 2 = h(5)$

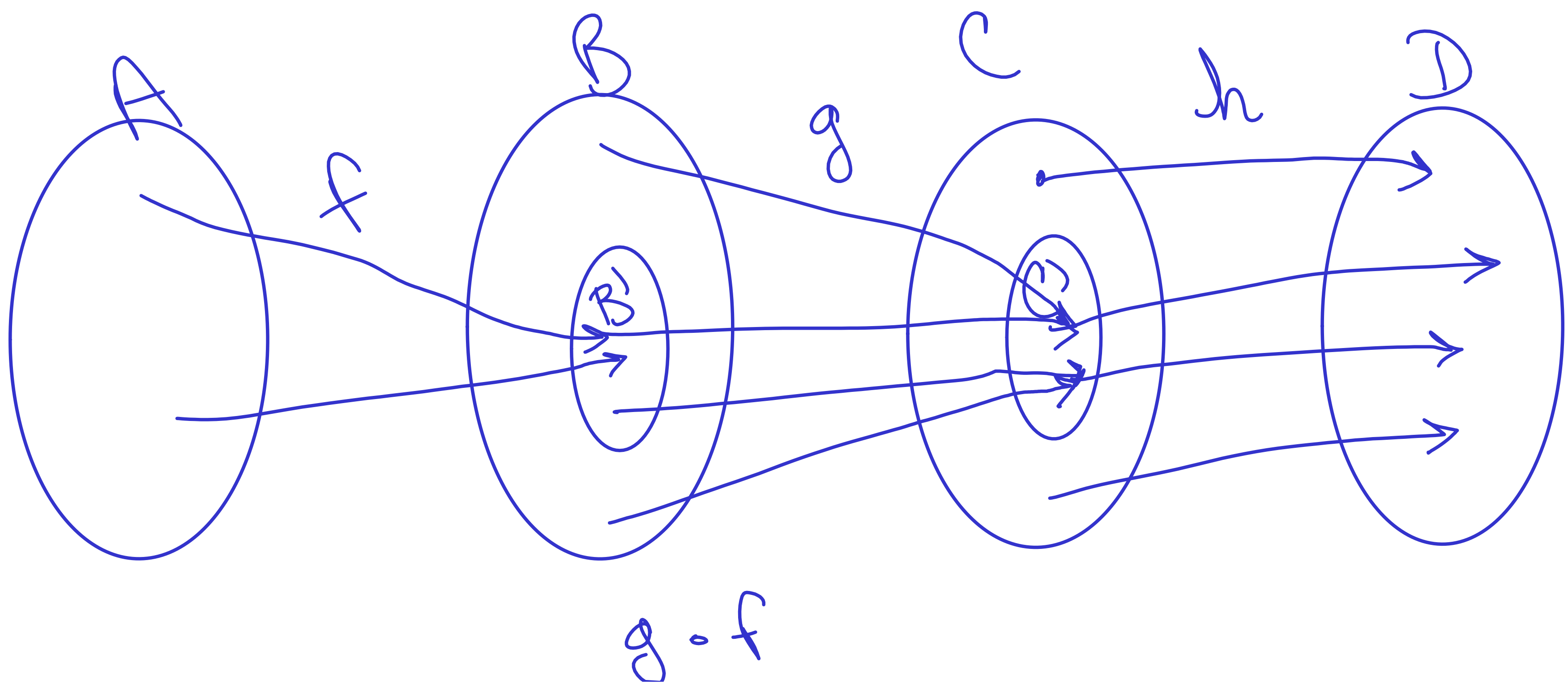
Lema: Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera.

Sean $B' \subseteq B$ y $C' \subseteq C$ conjuntos.

Sean $f: A \to B'$

$g: B \to C'$ y

$h: C \to D$.



Entonces $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

Dems:

① $\mathrm{Dom}(h\circ(g\circ f)) = \mathrm{Dom}(g\circ f) = \mathrm{Dom}(f) = A$

y $\mathrm{Dom}((h\circ g)\circ f) = \mathrm{Dom}(f) = A$.

② $\mathrm{Codom}(h\circ(g\circ f)) = \mathrm{Codom}(h) = D$.

y $\mathrm{Codom}((h\circ g)\circ f) = \mathrm{Codom}(h\circ g) = \mathrm{Codom}(h) = D$.

$\therefore$ $(h\circ g)\circ f$ y $h\circ(g\circ f)$ tienen el mismo dominio y el mismo contradominio.

Luego, para todo $x \in A$,

$$(h \circ g) \circ f(x) \underset{\text{def de } \circ}{=} (h \circ g)(f(x)) \underset{\text{def de } \circ}{=} h(g(f(x))).$$

y, por otro lado

$$h \circ (g \circ f)(x) \underset{\text{def de } \circ}{=} h(\underline{g \circ f(x)}) \underset{\text{def de } \circ}{=} h(\underline{g(f(x))}).$$

$$\therefore \; h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

$\square$

Teorema: Sea $f: A \to B$ y sup que $\exists\, g_1 : B \to A$ t.q. g_1 es inversa izquierda de f y $\exists\, g_2 : B \to A$ t.q. g_2 es inversa derecha de f. Entonces,

$$g_1 = g_2.$$

Dem: Sabemos que $g_1 : B \to A$ y

$$g_1 \circ f = Id_A. \quad \text{------------} \quad 1$$

Además sabemos que $g_2 : B \to A$ y

$$f \circ g_2 = Id_B \quad \text{------------} \quad 2$$

De ① se sigue que si componemos con g_2 del lado derecho:

$$(g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 .$$

Luego, $Id_A \circ g_2 = g_2$

Por otro lado, por el Lema,

$$\begin{aligned}(g_1 \circ f) \circ g_2 &= g_1 \circ (f \circ g_2) \\ &\underset{\text{por } ②}{=} g_1 \circ Id_B \\ &= g_1\end{aligned}$$

Por tanto, $g_1 = g_2$ $\square$

Corolario: Si $f: A \to B$ es t.q. $g_1: B \to A$ es inversa izq. de f y $g_2: B \to A$ es inv. derecha de f, entonces g_1 y g_2 son únicas.

Dems: Sup. que f, g_1 y g_2 son como en el enunciado y que $g_3: B \to A$ es inversa izq de f y $g_4: B \to A$ es inversa derecha de f.

PD $g_3 = g_1$ ✓ y $g_4 = g_2$. ✓

Por el Teorema anterior:

① $\underset{\text{inv. izq}}{g_1} = \underset{\text{inv. der.}}{g_2}$ ✓

② $\underset{\text{inv. izq.}}{g_1} = \underset{\text{inv. der.}}{g_4}$ ✓

③ $\underset{\text{inv. der.}}{g_2} = \underset{\text{inv. izq.}}{g_3}$ ✓

$\therefore \quad g_1 = g_2 = g_3 = g_4.$ $\square$

__Definición:__ Si $f: A \longrightarrow B$ es una función y si $g: B \longrightarrow A$ es una inversa izquierda e inversa derecha de f, entonces decimos que f es invertible. y que g es su inversa. Escribimos en este caso $f^{-1} = g$.

<u>Obs:</u> Si $f: A \to B$ es invertible y f^{-1} es su inversa, ent $f^{-1} \circ f = Id_A$

$f \circ f^{-1} = Id_B$.

<u>Corolario:</u> f es invertible si y sólo si f es biyectiva.

<u>Dems:</u> f es inv. sii f tiene inv. izq. e inv. derecha. Esto ocurre si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva, es decir sii f es biyectiva. $\square$