Tarea 6.

10 (iv) Sea $f: X \to Y$.

P.D $\forall A \subseteq X \quad A = f^{-1}[f[A]] \iff f$ es inyectiva.

Dem: $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sup. } \forall A \subseteq X \quad A = f^{-1}[f[A]].}$

P.D. f es inyectiva. i.e

$$\forall x_1, x_2 \in X \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right).$$

Sean $x_1, x_2 \in X$. Sup. que $f(x_1) = f(x_2)$

Sea $A = \{x_1\}$. Ent $A \subseteq X$. y, por hipótesis,

$$\{x_1\} = A = f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[\{f(x_1)\}].$$

Luego, como $f(x_1) = f(x_2)$, ent

$$\{f(x_1)\} = \{f(x_1), f(x_2)\}. \text{ y,}$$

ent.

$$x_1, x_2 \in f^{-1}[\{f(x_1), f(x_2)\}] = A = \{x_1\}$$

Por tanto, $x_2 \in \{x_1\}$ y entonces $x_1 = x_2$.

$\therefore$ f es inyectiva.

$\Leftarrow$ Sup. que f es inyectiva

P.D: $\forall A \subseteq X \quad f^{-1}[f[A]] = A$.

Sea $A \subseteq X$ arbitrario.

P.D: $f^{-1}[f[A]] = A$.

$\supseteq$ Este es el inciso 10(i):

Sea $x \in A$. P.D. $x \in f^{-1}[f[A]]$.

Como $x \in A$, ent $f(x) \in f[A]$ (por def. de imagen directa) y entonces, por def. de imagen inversa, esto implica que $x \in f^{-1}[f[A]]$.

$\subseteq$ $\boxed{\text{Sea}}$ $\boxed{x \in f^{-1}[f[A]]}$.

Entonces, por def. de imagen inversa esto implica que $f(x) \in f[A]$.

Esto significa, por def. de imagen directa, que $\exists\ \tilde{x} \in A$ t.q.

$$f(x) = f(\tilde{x}).$$

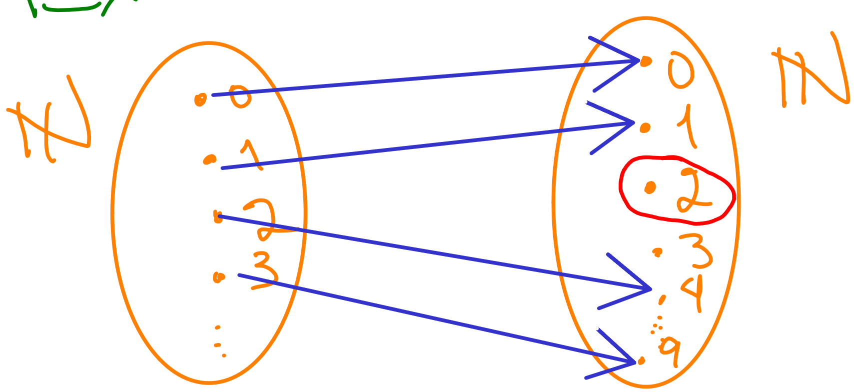
Entonces, como f es inyectiva, concluimos que $x = \tilde{x}$ y, por tanto, $x \in A$.

$$\therefore \forall A \subseteq X \quad A = f^{-1}[f[A]]. \qquad \square$$

---

14. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ t.q $f(n) = n^2$.

(i) Exhiba dos inversas izquierdas de f.



Sea $g_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$g_1(n) = \begin{cases} \sqrt{n} = m & \text{si } n = m^2 \\ 1 & \text{si } \forall m \in \mathbb{N} \ n \neq m^2. \end{cases}$$

- g_1 es función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ pues $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que si $\exists m \in \mathbb{N}$ $n = m^2$, ent. dicho m es único.
- $g_1 \circ f(n) = g_1(n^2) = n = Id_{\mathbb{N}}(n)$.

Otra inversa izq. para f es $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$g_2(n) = \begin{cases} m & \text{si } n = m^2 \\ 2 & \text{si } \underline{\forall m \in \mathbb{N} \ n \neq m^2}. \end{cases}$$

De manera análoga a g_1 se ve que g_2 es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ y

$$\underline{\underline{g_2 \circ f = Id_{\mathbb{N}}.}}$$

(ii) Muestre que f no tiene inversa derecha.

Como $2 \in \mathbb{N}$ pero $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = n^2 \neq 2$, ent. f no es sobreyectiva y, por tanto, por Teo. de clase, f no tiene inversa derecha.

$\square$

Ejercicio extra: Sea $f: X \to Y$ con $\# X > 1$

PD Si f tiene una única inv. izq $g: Y \to X$, ent f es biyectiva.

Sugerencia: Si $f[X] \subsetneq Y$ ent f tiene al menos dos invs. izq.