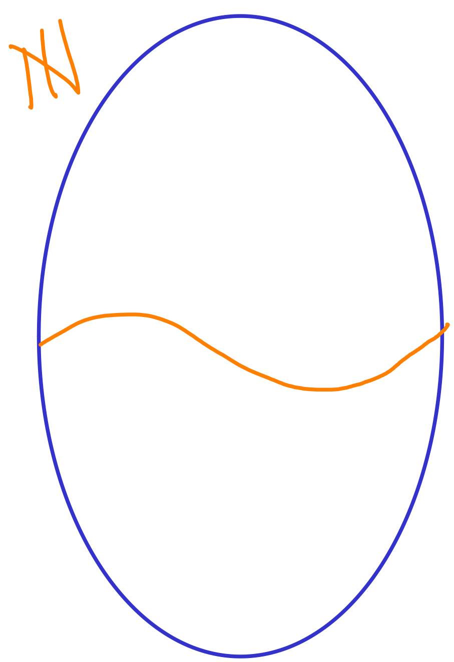
Del Examen III.

2. (i) Sea $A = \mathbb{N}$

$P = \{\{m \in \mathbb{N} : m \text{ es múltiplo de } 3\}, \{m \in \mathbb{N} : m \text{ no es múltiplo de } 3\}\}$

a) Dems. que P es una partición de $\mathbb{N}$.



Sean $A_1 = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es múltiplo de } 3\}$

$A_2 = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ no es múltiplo de } 3\}$.

Ent $P = \{A_1, A_2\}$.

Veamos que es partición de $\mathbb{N}$.

(1) Nótese que, $3 \in A_1$ pues 3 es múltiplo de 3

$\therefore A_1 \neq \phi$

Además, $1 \in A_2$ pues 1 no es múltiplo de 3, de modo que $A_2 \neq \phi$.

(2) Veamos ahora que $A_1 \cap A_2 = \phi$.

Si existiera $x \in A_1 \cap A_2$, ent como $x \in A_1$, x sería múltiplo de 3 y como $x \in A_2$, x no sería múltiplo de 3.

$\therefore \forall x \; x \notin A_1 \cap A_2$, es decir $A_1 \cap A_2 = \phi$.

(3) Veamos ahora que $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$.

$\boxed{\subseteq}$ Como $A_1 \subseteq \mathbb{N}$ y $A_2 \subseteq \mathbb{N}$, entonces por def de A_1 y A_2. por props de la unión, $A_1 \cup A_2 \subseteq \mathbb{N}$.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $m \in \mathbb{N}$. P.D $m \in A_1 \cup A_2$.

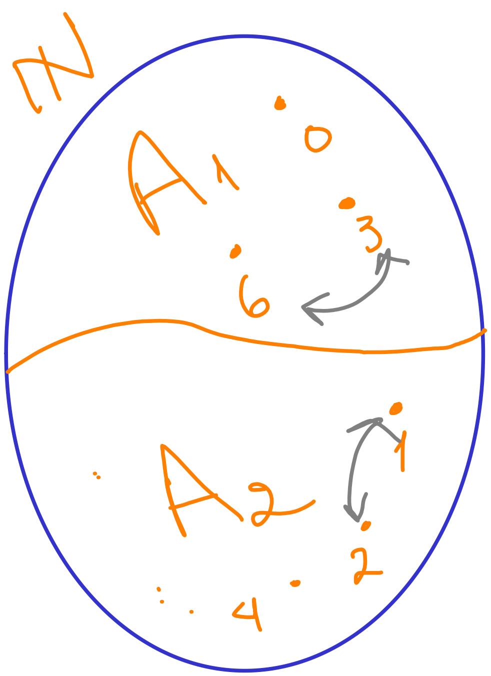
<u>Caso 1.</u> Si m es múltiplo de 3, entonces $m \in A_1$, y, por tanto $m \in A_1 \cup A_2$ (pues $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$)

<u>Caso 2:</u> Si m no es múltiplo de 3, ent. $m \in A_2$ y como $A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$, ent $m \in A_1 \cup A_2$.

Ent $m \in A_1 \cup A_2$ en cualquiera de los casos posibles y, por tanto, $\mathbb{N} \subseteq A_1 \cup A_2$.

$\therefore \mathbb{N} = A_1 \cup A_2$.

$\therefore$ Por (1), (2) y (3) concluimos que $\mathcal{P}$ es partición de $\mathbb{N}$.



(b) Definamos la relación de equivalencia inducida por $\mathcal{P}$:

Sea $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida como.

xRy si y sólo si $\exists k \in \mathbb{N}$ $x+y=3k$.

Tenemos que ver que $xRy \Longleftrightarrow (x \in A_1 \wedge y \in A_1)$
$\vee (x \in A_2 \wedge y \in A_2)$.

$\Rightarrow$] Sean $x, y \in \mathbb{N}$ t.q. xRy. Ent.

$\exists k \in \mathbb{N}$ t.q $x + y = 3k$.

Caso 1. Si x es múltiplo de 3, ent.

$\exists r \in \mathbb{N}$ t.q $x = 3r$.

Ent. $3r + y = 3k$ y ent.

$$y = 3k - 3r = 3(k - r)$$

y, por tanto, y es múltiplo de 3

$\therefore x \in A_1$ y $y \in A_1$.

__Caso 2:__ Sup que x __no__ es múltiplo de 3.

P.D. y no es múltiplo de 3.

Si y fuera múltiplo de 3, ent $\exists\, q \in \mathbb{N}$ t.q $y = 3 \cdot q$.

Ent $3k = x + y = x + 3q$.

Ent $x = 3k - 3q = 3(k - q)$. ↯

pues x __no__ es múltiplo de 3.

$\therefore$ Si x __no__ es múltiplo de 3 ent y __no__ es múltiplo de 3.

$\therefore$ R es la relación de equivalencia

$$\boxed{\text{t.q. } xRy \iff \big((x\in A_1 \wedge y\in A_1) \vee (x\in A_2 \wedge y\in A_2)\big)}$$

que es la relación de equiv. inducida por P.

$\square$